

Autour de l'inégalité de Hoffman-Wielandt

A Un exemple

1. En notant la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & \dots & n-1 \end{pmatrix}$, on a $J = M_\sigma$

donc J est une matrice de permutation

On développe le polynôme caractéristique de J par rapport à la première colonne pour obtenir :

$$\chi_J(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & X \end{vmatrix}_{[n]} = X \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & X \end{vmatrix}_{[n-1]} - (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ X & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & X & -1 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

Ce qui permet de conclure que $\chi_J = X^n - 1$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(J) = \mathbb{U}_n$

comme $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres complexes, on en déduit que J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$

2. Soit $\omega = \exp(2ik\pi/n)$ où $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On identifie canoniquement $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$\text{On a pour } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), X \in E_\omega(J) \iff \begin{cases} x_2 & = \omega x_1 \\ x_3 & = \omega x_2 \\ & \ddots = \vdots \\ x_n & = \omega x_{n-1} \\ x_1 & = \omega x_n \end{cases}$$

Ainsi $E_\omega(J) = \text{vect}((1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}))$ car $\omega^n = 1$

et comme $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\omega \in \mathbb{U}_n} E_\omega(J)$ car J est diagonalisable

En notant $e_\omega = (1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, alors $(e_{\exp(2ik\pi/n)})_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de vecteur propre de J

où e_ω est associé à la valeur propre $\omega \in \mathbb{U}_n$

3. On a $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Soit $m \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

$((X_m = i))_{0 \leq i \leq n-1}$ forme un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilité totale :

$$\text{Si } k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket, P(X_{m+1} = k) = \sum_{i=0}^{n-1} P(X_{m+1} = k \mid X_m = i) P(X_m = i)$$

donc $P(X_{m+1} = k) = P(X_{m+1} = k \mid X_m = k-1)P(X_m = k-1) + P(X_{m+1} = k \mid X_m = k+1)P(X_m = k+1)$

ainsi $P(X_{m+1} = k) = \frac{1}{2}P(X_m = k-1) + \frac{1}{2}P(X_m = k+1)$

et si $k = 0$ on a $P(X_{m+1} = 0) = \frac{1}{2}P(X_m = n-1) + \frac{1}{2}P(X_m = 1)$

et si $k = n-1$ on a $P(X_{m+1} = n-1) = \frac{1}{2}P(X_m = n-2) + \frac{1}{2}P(X_m = 0)$

En prenant $A = \frac{1}{2}(J + {}^tJ) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a pour tout $m \in \mathbb{N}$, $U_{m+1} = AU_m$

4. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable via une base orthonormale.

Je reprends les notations de 1. pour σ . et je note $(\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$ avec l'identification usuelle à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour s permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $M_s \varepsilon_k = \varepsilon_{s(k)}$ ainsi l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée M_s envoie la base $(\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$ sur la base $(\varepsilon_{s(k)})_{1 \leq k \leq n}$

Ces deux bases étant orthonormées pour la structure euclidienne usuelle, on a donc $M_s \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ pour toutes permutations s .

Comme $J = M_\sigma \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $J^t J = I_n$ et ${}^t J = J^{-1}$

En reprenant les notations de 2. on a pour $\omega \in \mathbb{U}_n$:

$$J e_\omega = \omega e_\omega \text{ et donc } {}^t J e_\omega = J^{-1} e_\omega = \omega^{-1} e_\omega = \bar{\omega} e_\omega \text{ car } \omega \in \mathbb{U}_n$$

donc

$$A e_\omega = \frac{1}{2}(J + {}^t J) e_\omega = \operatorname{Re}(\omega) e_\omega \text{ et } \operatorname{Re}(\omega) \in \mathbb{R} \cap \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$$

On a aussi $\operatorname{Re}(e_\omega)$ et $\operatorname{Im}(e_\omega) \in E_{\operatorname{Re}(\omega)}(A)$ où $\operatorname{Re}(e_\omega)$ et $\operatorname{Im}(e_\omega) \in \mathbb{R}^n$ et $\operatorname{Re}(e_\omega) + i \operatorname{Im}(e_\omega) = e_\omega$

On a $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(J) = \mathbb{U}_n$ et donc $\mathbb{R} \cap \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(J) = \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(J) = \{1\}$ car n est impair

si $\omega = 1$ alors on trouve $e_1 = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ comme vecteur propre de J associé à la valeur propre 1

Si $\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \mathbb{R}$, alors on peut écrire $\omega = \exp(2ik\pi/n)$ avec $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

cela nous donne comme vecteurs de $E_\omega(A)$: $f_k = \operatorname{Re}(e_\omega)$ et $g_k = \operatorname{Im}(e_\omega)$ où

$$f_k = (1, \cos(2k\pi/n), \cos(4k\pi/n), \dots, \cos((n-1)k\pi/n)) \in \mathbb{R}^n,$$

$$g_k = (0, \sin(2k\pi/n), \sin(4k\pi/n), \dots, \sin((n-1)k\pi/n)) \in \mathbb{R}^n$$

Pour $k \in \llbracket 1, (n-1)/2 \rrbracket$, on a $0 < 2k\pi/n < \pi$ nous avons donc deux vecteurs propres de J non colinéaires associés à la valeur propre $\lambda_k = \operatorname{Re}(\exp(2ik\pi/n)) = \cos(2k\pi/n) \in \mathbb{R}$

Lorsque k parcourt $\llbracket 1, (n-1)/2 \rrbracket$, $2k\pi/n$ décrit k des valeurs distincts de $]0, \pi[$ et la fonction $\cos$ est strictement décroissante sur $]0, \pi[$

donc les $\lambda_k = \cos(2k\pi/n)$ sont des réels distincts deux à deux lorsque k parcourt $\llbracket 0, (n-1)/2 \rrbracket$

On peut donc revenir dans $\mathbb{R}^n$.

Si $k = 0$, on a $E_{\lambda_0}(A) \supset \operatorname{vect}(e_1) = \operatorname{vect}(f_0)$ et donc $\dim(E_{\lambda_0}(A)) \geq 1$

et pour $k \in \llbracket 1, (n-1)/2 \rrbracket$, on a $E_{\lambda_k}(A) \supset \operatorname{vect}(f_k, g_k)$ et donc $\dim(E_{\lambda_k}(A)) \geq 2$

comme les espaces propres sont en somme direct on a $\mathbb{R}^n \supset \bigoplus_{k=0}^{(n-1)/2} E_{\lambda_k}(A)$

On a $\dim \mathbb{R}^n = n$ et $\dim \left(\bigoplus_{k=0}^{(n-1)/2} E_{\lambda_k}(A) \right) = \dim(E_{\lambda_0}(A)) + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \dim(E_{\lambda_k}(A)) \geq 1 + 2 \times \frac{n-1}{2} = n$

Donc on a $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{k=0}^{(n-1)/2} E_{\lambda_k}(A)$ et $\boxed{\operatorname{Sp}(A) = \{\cos(2k\pi/n) / 0 \leq k \leq (n-1)/2\}}$

La plus grande valeur propre est $\lambda_0 = 1$

$\boxed{\text{Un vecteur propre de } A \text{ unitaire associé à la valeur propre de module maximal est } \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n}$

5. On peut écrire $U_0 = \sum_{k=0}^{(n-1)} h_k$ où $h_k \in E_{\lambda_k}(A)$. Soit $m \in \mathbb{N}$, on a $U_m = \sum_{k=0}^{(n-1)} \lambda_k^m h_k$

comme $\lambda_0 = 1$ et si $1 \leq k \leq (n-1)/2$, $|\lambda_k| < 1$ On a $U_m \rightarrow h_0$ lorsque $m \rightarrow +\infty$

Comme $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{0 \leq k \leq (n-1)/2} E_{\lambda_k}(A)$ d'après le théorème spectral, h_0 est le projeté orthogonal de U_0 sur $E_{\lambda_0}(A)$

En notant $v = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)$, on a donc $h_0 = \langle v, U_0 \rangle v$, on en déduit $\boxed{U_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} (1/n, \dots, 1/n)}$

B Théorème de Birkhoff-Von Neumann

6. • Soit A et $B \in \mathcal{B}_n$. Soit $\lambda \in [0, 1]$. Montrons que $C = \lambda A + (1 - \lambda)B \in \mathcal{B}_n$.

Pour $i, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $C_{i,k} = \lambda A_{i,k} + (1 - \lambda)B_{i,k} \geq 0$ car $[0, 1]$ convexe

et $\sum_{j=1}^n C_{i,j} = \lambda \sum_{j=1}^n A_{i,j} + (1 - \lambda) \sum_{j=1}^n B_{i,j} = 1$ et de même $\sum_{j=1}^n C_{j,i} = 1$

On a bien $C \in \mathcal{B}_n$, on a montré que $\boxed{\mathcal{B}_n \text{ est convexe}}$

- On considère les applications $\varphi_i : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{j=1}^n M_{i,j} \in \mathbb{R}$, $\varphi'_i : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{j=1}^n M_{j,i} \in \mathbb{R}$ et

$$\psi_{i,k} : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{j=1}^n M_{j,i} \in \mathbb{R}$$

Ces applications sont continues car linéaires et définies sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dimension finie et de plus les notions topologiques ne dépendent pas du choix de la norme.

$$\text{On a } \mathcal{B}_n = \left(\bigcap_{i=1}^n \varphi_i^{-1}(\{1\}) \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \varphi'_i^{-1}(\{1\}) \right) \cap \left(\bigcap_{1 \leq i, k \leq n} \psi_{i,k}^{-1}(\mathbb{R}^+) \right)$$

Comme $\{1\}$ et $\mathbb{R}^+$ sont des fermés de $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}_n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par intersection des fermés

De plus l'application $N : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \max_{1 \leq i, k \leq n} |M_{i,k}| \in \mathbb{R}$ est une norme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Ainsi $\forall M \in \mathcal{B}_n$, $N(M) \leq 1$ donc $\mathcal{B}_n$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace de dimension finie et comme $\mathcal{B}_n$ est aussi fermée $\boxed{\mathcal{B}_n \text{ est une partie compacte}}$

- la matrice nulle n'est pas bistochastique car la somme sur une rangée est nulle

Ainsi $\boxed{\mathcal{B}_n \text{ n'est pas un sous espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

7. • Soit $A \in \mathcal{P}_n$. On écrit $A = M_\sigma$ où σ est une permutation.

Pour tout $i, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $A_{i,k} \geq 0$ car 0 et $1 \in \mathbb{R}^+$

de plus $\sum_{j=1}^n M_{i,j} = M_{\sigma^{-1}(i),j} + 0 = 1$ et de même $\sum_{j=1}^n M_{j,i} = 1$

donc $M \in \mathcal{B}_n$. On a montré $\boxed{\mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}_n}$

- On considère σ et σ' deux permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

D'après ce qui a été fait en 4. sur les matrices de permutations, on a $M_{\sigma'} M_\sigma \varepsilon_k = \varepsilon_{\sigma' \circ \sigma(k)}$ ainsi l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé $M_{\sigma'} M_\sigma$ envoie la base $(\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$ sur la base $(\varepsilon_{\sigma' \circ \sigma(k)})_{1 \leq k \leq n}$

On note S_n le groupe des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et on a

$$\forall \sigma, \sigma' \in S_n, M_\sigma \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et } M_{\sigma'} \times M_\sigma = M_{\sigma' \circ \sigma}$$

Comme $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})$, l'application $\psi_n : \begin{cases} S_n & \longrightarrow & \text{GL}_n(\mathbb{R}) \\ \sigma & \longmapsto & M_\sigma \end{cases}$ est bien définie et il s'agit aussi d'un morphisme de groupes

De plus $\text{Im}(\psi_n) = \mathcal{P}_n$ donc $\boxed{\mathcal{P}_n \text{ est un sous-groupe multiplicatif de } \text{GL}_n(\mathbb{R})}$

- Soit $A = M_\sigma \in \mathcal{P}_n$. On note w l'ordre de σ dans S_n .

En utilisant le morphisme précédent, on a $A^w = I_n$

donc $X^w - 1$ est un polynôme annulateur de A or ce polynôme est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$

donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. On a montré que $\boxed{\text{Tout élément de } \mathcal{P}_n \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}}$

- On a J et ${}^t J \in \mathcal{P}_n$ et $\frac{1}{2}J + \frac{1}{2}{}^t J \notin \mathcal{P}_n$ car $\frac{1}{2} \notin \{0, 1\}$ en ayant pris J est la matrice de la permutation.

Ainsi $\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{P}_n \text{ n'est pas convexe}}$

8. Soit $A \in \mathcal{P}_n$. Soit M, N dans $\mathcal{B}_n$ et $\lambda \in]0, 1[$ tels que $A = \lambda M + (1 - \lambda)N$. Montrons $A = M = N$.

Soit $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a $A_{i,j} = \lambda M_{i,j} + (1 - \lambda)N_{i,j}$

Comme M, N dans $\mathcal{B}_n$, on a $M_{i,j}$ et $N_{i,j} \in [0, 1]$ et $\lambda > 0$ et $1 - \lambda > 0$

Si on a $A_{i,j} = 0$, alors $0 = \lambda M_{i,j} + (1 - \lambda)N_{i,j}$ donc nécessairement $M_{i,j} = N_{i,j} = 0$

Sinon on a $A_{i,j} = 1$, on a $1 = \lambda M_{i,j} + (1 - \lambda)N_{i,j}$ donc nécessairement $M_{i,j} = N_{i,j} = 1$

On utilise le fait que 0 et 1 sont extrémaux dans $[0, 1]$

On a bien montré que toute matrice de $\mathcal{P}_n$ est extrémales dans $\mathcal{B}_n$

9. étape 1 : On va construire par récurrence deux suites $(i_m)_{m \geq 1}$ et $(j_m)_{m \geq 1}$ telles que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, A_{i_m, j_m} \in]0, 1[\text{ et } A_{i_m, j_{m+1}} \in]0, 1[\text{ et } i_m \neq i_{m+1} \text{ et } j_m \neq j_{m+1}$$

On remarque que si $A \in \mathcal{B}_p$ et $\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $A_{i,j} \in \{0, 1\}$ alors il y a exactement une occurrence de 1 et $p - 1$ occurrences de 0 par ligne et par colonne. Dans ce cas, il existe une unique permutation σ telle que $A = M_\sigma$. Comme $A \in \mathcal{B}_p \setminus \mathcal{P}_p$, ceci nous fournit i_1, j_1 tels que $A_{i_1, j_1} \in]0, 1[$ (par contraposée).

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On suppose construit $(i_m)_{1 \leq m \leq N}$ et $(j_m)_{1 \leq m \leq N}$ telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall m \in \llbracket 1, N \rrbracket, A_{i_m, j_m} \in]0, 1[\\ \forall m \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket, A_{i_m, j_{m+1}} \in]0, 1[\\ \forall m \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket, i_m \neq i_{m+1} \\ \forall m \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket, j_m \neq j_{m+1} \end{array} \right.$$

On vient d'effectuer cette construction pour $N = 1$ ce qui est une initialisation.

On a $A_{i_N, j_N} \in]0, 1[$ et comme $\sum_{k=1}^p A_{i_N, k} = 1$ et $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, A_{i_N, k} \geq 0$,

ceci nous fournit un entier noté $j_{N+1} \in \llbracket 1, p \rrbracket \setminus \{j_N\}$ tel que $A_{i_N, j_{N+1}} \in]0, 1[$

De même, on construit $i_{N+1} \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_N\}$ tel que $A_{i_{N+1}, j_{N+1}} \in]0, 1[$

On a donc construit $(i_m)_{1 \leq m \leq N+1}$ et $(j_m)_{1 \leq m \leq N+1}$ telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall m \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket, A_{i_m, j_m} \in]0, 1[\\ \forall m \in \llbracket 1, N \rrbracket, A_{i_m, j_{m+1}} \in]0, 1[\\ \forall m \in \llbracket 1, N \rrbracket, i_m \neq i_{m+1} \\ \forall m \in \llbracket 1, N \rrbracket, j_m \neq j_{m+1} \end{array} \right.$$

Ce qui nous donne l'hérédité. On a construit nos suites $(i_m)_{m \geq 1}$ et $(j_m)_{m \geq 1}$ par récurrence.

étape 2 Comme les couples (i_m, j_m) ($m \in \mathbb{N}^*$) prennent au plus p^2 valeurs.

Ceci nous fournit $a < b$ dans $\mathbb{N}^*$ tels que $(i_a, j_a) = (i_b, j_b)$

donc l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* / \exists c \in \mathbb{N}^*, i_c = i_{c+k} \text{ ou } j_c = j_{c+k}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$

cet ensemble admet donc un plus petit élément $r > 0$, de plus par construction des suites on a $r > 1$

On a alors : $\forall d \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \llbracket 1, r - 1 \rrbracket, i_d \neq i_{d+m} \text{ et } j_d \neq j_{d+m}$

et on peut prendre $c \in \mathbb{N}$ tel que $i_c = i_{c+r}$ ou $j_c = j_{c+r}$

Premier cas : si $j_c = j_{c+r}$ alors

les deux familles $i_c, i_{c+1}, \dots, i_{c+r-1}$ et $j_c, j_{c+1}, \dots, j_{c+r-1}$ sont d'indices distincts dans $\{1, 2, \dots, p\}$ tels que pour tous $k \in \{1, 2, \dots, r\}$, $A_{i_{c+k-1}, j_{c+k-1}} \in]0, 1[$ et $A_{i_{c+k-1}, j_{c+k}} \in]0, 1[$ avec $j_{c+r} = j_c$

Deuxième cas : si $j_c \neq j_{c+r}$,

alors $i_c = i_{c+r}$ et $A_{i_c, j_{c+r}} = A_{i_{c+r}, j_{c+r}} \in]0, 1[$ et les deux familles $i_c, i_{c+1}, \dots, i_{c+r-1}$ et $j_c, j_{c+1}, \dots, j_{c+r}$ sont d'indices distincts dans $\{1, 2, \dots, p\}$. On remplace la valeur de j_c par celle de j_{c+r} de sorte que :

pour tous $k \in \{1, 2, \dots, r\}$, $A_{i_{c+k-1}, j_{c+k-1}} \in]0, 1[$ et $A_{i_{c+k-1}, j_{c+k}} \in]0, 1[$ avec $j_{c+r} = j_c$

Dans chaque cas il suffit d'effectuer un changement d'indice (translation de $1 - c$) pour obtenir :

un entier $r > 1$ et deux familles $i_1, i_2, \dots, i_r$ et $j_1, j_2, \dots, j_r$ d'indices distincts dans $\{1, 2, \dots, p\}$

tels que pour tous $k \in \{1, 2, \dots, r\}$, $A_{i_k, j_k} \in]0, 1[$ et $A_{i_k, j_{k+1}} \in]0, 1[$ avec $j_{r+1} = j_1$

J'ai imposé $r \geq 2$ car avec $r = 1$, le résultat ne permet pas d'introduire la matrice B de l'énoncé.

10. On note $m = \min \left(\bigcup_{k=1}^r \{A_{i_k, j_k}, A_{i_k, j_{k+1}}, 1 - A_{i_k, j_k}, 1 - A_{i_k, j_{k+1}}\} \right)$

De sorte que les matrices $A - mB$ et $A + mB$ sont à coefficients positifs (ou nuls)

La somme des coefficients de chaque rangée de B est nulle.

Ainsi $\sum_{j=1}^n (A - mB)_{i,j} = \sum_{j=1}^n A_{i,j} = \sum_{j=1}^n (A + mB)_{i,j} = \sum_{j=1}^n A_{i,j} = 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

de plus $B \neq 0$

donc on a $A \neq A - mB \in \mathcal{B}_n$ et $A \neq A + mB \in \mathcal{B}_n$ et $A = \frac{1}{2}(A - mB) + \frac{1}{2}(A + mB)$

ainsi A n'est pas un élément extrémal de $\mathcal{B}_n$

On vient d'établir la contraposée de : $\forall M \in \mathcal{B}_n, (M \text{ est extrémale dans } \mathcal{B}_n) \implies (M \in \mathcal{P}_n)$

On a établi la réciproque en 8.

On en déduit que l'ensemble des éléments extrémaux de $\mathcal{B}_n$ est $\mathcal{P}_n$

11. La matrice A est à coefficients positifs, on peut donc utiliser le résultat admis.

Par l'absurde, on suppose que A n'admet pas un chemin strictement positif

Ainsi par contraposée du résultat admis, on peut extraire la matrice nulle de A ayant p lignes et q colonnes avec $p + q = n + 1$ et $p, q \in \mathbb{N}^*$.

Quitte à réordonner les lignes et les colonnes de la matrice A , (ce qui ne change pas le caractère bistochastique), on peut donc supposer que la matrice $(A_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$

Premier cas $1 < p < n$ Dans cas, $1 < q < n$ alors pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a $1 = \sum_{j=1}^n A_{i,j} = \sum_{j=q+1}^n A_{i,j}$

$$\text{donc } p = \sum_{i=1}^p \sum_{j=q+1}^n A_{i,j} = \sum_{j=q+1}^n \sum_{i=1}^p A_{i,j} \leq \sum_{j=q+1}^n \sum_{i=1}^n A_{i,j} = \sum_{j=q+1}^n 1 \leq n - q$$

donc $n + 1 = p + q \leq n$ Absurde

Deuxième cas $p = n$ Dans ce cas $q = 1$ et $(A_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq 1}}$ est nulle donc $1 = \sum_{i=1}^n A_{i,1} = 0$ Absurde

Troisième cas $p = 1$ Dans ce cas $q = n$ et $(A_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 1 \\ 1 \leq j \leq n}}$ est nulle donc $1 = \sum_{i=1}^n A_{1,i} = 0$ Absurde

On a montré par l'absurde que A admet un chemin strictement positif

12. — Par l'absurde, on suppose que $\min_j (A_{\sigma(j),j}) = \lambda_0 \geq 1$

Comme $A \in \mathcal{B}_n$ on a $\min_j (A_{\sigma(j),j}) = \lambda_0 = 1$

Comme $A \in \mathcal{B}_n$, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $A_{\sigma(j),j} = 1$ car $A_{\sigma(j),j} \leq 1$

Donc sur chaque colonne numéro j , le seul coefficient non nul est $A_{\sigma(j),j}$

$$\text{car } \sum_{i=1}^n A_{i,j} = 1 \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_{i,j} \geq 0$$

Donc $A = M_\sigma$ Absurde d'après l'énoncé

On a montré que $\lambda_0 \neq 1$ ainsi A_0 est bien définie

— Les coefficients de A_0 sont identiques à ceux de A sauf pour ceux en position $(\sigma(j), j)$ pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\text{et on a } A_{0, \sigma(j), j} = \frac{A_{\sigma(j), j} - \lambda_0}{1 - \lambda_0} \geq 0 \text{ par définition de } \lambda_0$$

Le coefficient s'annule pour les j_0 (qui existe(nt) bien) tels que $A_{\sigma(j_0), j_0} = \lambda_0 > 0$

La somme des coefficients de chaque rangée de $A - \lambda_0 M_\sigma$ vaut $1 - \lambda_0$

donc La somme des coefficients sur chaque rangée de A_0 vaut 1

Ainsi A_0 est une matrice bistochastique contenant au moins un élément nul de plus que A

13. Pour $p \in \llbracket n, n^2 \rrbracket$ on considère la propriété H_p que l'on va démontrer par récurrence

"Toute matrice $B \in \mathcal{B}_n$ ayant au plus p coefficients non nuls s'écrit comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de matrices de permutation $M_0, M_1, \dots, M_s : B = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_s M_s$ où les coefficients λ_i sont tous strictement positifs et de somme $\sum_{i=0}^s \lambda_i = 1$ "

Initialisation : Soit $B \in \mathcal{B}_n$ ayant au plus n coefficients non nuls

Alors sur chaque colonne et sur chaque ligne la matrice B a au plus un coefficient non nul car la somme sur chaque rangée vaut 1

Ainsi sur chaque colonne et sur chaque ligne la matrice B admet exactement un coefficient non nul qui vaut un

On définit $\sigma : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ par $i = \sigma(j) \iff B_{i,j} = 1$

σ est donc surjective et par conséquent bijective car $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $\llbracket 1, n \rrbracket$ ont même cardinal fini

ainsi $B = 1.M_\sigma$ je prends donc $s = 0$, $\lambda_0 = 1$ pour obtenir le résultat voulu

Hérédité : Soit $p \in \llbracket n, n^2 - 1 \rrbracket$ tel que H_p . Montrons H_{p+1}

Soit $B \in \mathcal{B}_n$ ayant au plus $p + 1$ coefficients non nuls.

Donc $B \notin \mathcal{P}_n$ ainsi on peut lui appliquer le résultat de la question 12 ;

ce qui nous fournit , $\mu \in]0, 1[$ et M_σ matrice de permutation associée à une permutation σ telle que

$$B' = \frac{1}{1-\mu}(B - \mu M_\sigma) \in \mathcal{B}_n \text{ et } B' \text{ a au plus } p \text{ coefficients non nuls}$$

H_p nous fournit un nombre fini de matrices de permutation $M_0, M_1, \dots, M_s$ et des coefficients λ_i tous strictement positifs et de somme $\sum_{i=0}^s \lambda_i = 1$ tel que

$$B' = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_s M_s$$

donc $B = \mu M_\sigma + (1 - \mu)\lambda_0 M_0 + (1 - \mu)\lambda_1 M_1 + \dots + (1 - \mu)\lambda_s M_s$

On a $\mu > 0$ et pour tout $i \in \llbracket 0, s \rrbracket$, $(1 - \mu)\lambda_i > 0$ et $\mu + (1 - \mu)\lambda_0 + (1 - \mu)\lambda_1 + \dots + (1 - \mu)\lambda_s = 1$

ce qui prouve H_{p+1}

Conclusion : On a montré par récurrence : $\forall p \in \llbracket n, n^2 \rrbracket$, H_p

on applique cette propriété H_{n^2} à la matrice A , on peut conclure que

A s'écrit comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de matrices de permutation $M_0, M_1, \dots, M_s$:

$$A = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_s M_s \text{ où les coefficients } \lambda_i \text{ sont tous strictement positifs tels que } \sum_{i=0}^s \lambda_i = 1$$

14. L'ensemble $\mathcal{P}_n$ est finie, d'où $\inf_{M \in \mathcal{P}_n} \varphi(M)$ existe (c'est même un minimum)

il existe alors $m \in \mathcal{P}_n$ tel que $\varphi(m) = \inf_{M \in \mathcal{P}_n} \varphi(M)$

On a $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc φ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

De plus $\mathcal{B}_n$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Donc φ est bornée sur $\mathcal{B}_n$ et y atteint ces bornes

d'où $\inf_{M \in \mathcal{B}_n} \varphi(M)$ existe et il existe $A \in \mathcal{B}_n$ tel que $\varphi(A) = \inf_{M \in \mathcal{B}_n} \varphi(M)$

En utilisant le résultat de la question précédente, on écrit A comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de matrices de permutation $M_0, M_1, \dots, M_s : A = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_s M_s$ où les coefficients λ_i sont tous strictement positifs tels que $\sum_{i=0}^s \lambda_i = 1$

Comme $m \in \mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}_n$, on a $\varphi(A) \leq \varphi(m)$

et $\varphi(A) = \lambda_0 \varphi(M_0) + \lambda_1 \varphi(M_1) + \dots + \lambda_s \varphi(M_s) \geq \lambda_0 \varphi(m) + \lambda_1 \varphi(m) + \dots + \lambda_s \varphi(m) = \varphi(m)$

Ainsi $\inf_{M \in \mathcal{B}_n} \varphi(M) = \varphi(A) = \varphi(m)$

On en déduit que $\inf_{M \in \mathcal{B}_n} \varphi(M)$ existe et est atteint en une matrice de permutation

C Inégalité de Hoffman-Wielandt

15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P, Q dans $O_n(\mathbb{R})$

On a ${}^t(PAQ)PAQ = {}^tQ {}^tA {}^tPPAQ = {}^tQ {}^tAAQ$ car $P \in O_n(\mathbb{R})$.

Or deux matrices semblables ont même trace et ${}^tQ = Q^{-1}$

donc ${}^t(PAQ)PAQ = {}^tQ {}^tAAQ$ et tAA ont même trace

Ainsi $\|PAQ\|^2 = \|A\|^2$, donc on a $\|PAQ\| = \|A\|$

16. A et B sont deux matrices **symétriques réelles**

Le théorème spectral nous fournit une matrice diagonale réelle D_A et une matrice orthogonale Q telle que $A = {}^tQD_AQ$

D'après ce qui précède car ${}^tQ, Q \in O_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\|A - B\|^2 = \|Q(A - B) {}^tQ\|^2 = \|D_A - QB {}^tQ\|^2$$

on a $QB {}^tQ$ est symétrique réelle le théorème spectral nous fournit une matrice diagonale réelle D_B et une matrice orthogonale $P = (P_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ telles que $QB {}^tQ = PD_B {}^tP$

et comme $I_n \in O_n(\mathbb{R})$, on a $\|A - B\|^2 = \|D_A - PD_B {}^tP\|^2 = \|I_n(D_A - PD_B {}^tP)P\|^2$

donc $\|A - B\|^2 = \|D_AP - PD_B\|^2$ avec D_A, D_B diagonales réelles et $P = (P_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in O_n(\mathbb{R})$

17. La matrice R définie par : $R_{i,j} = (P_{i,j})^2$ pour tous i, j dans $\{1, 2, \dots, n\}$, est à coefficients dans $\mathbb{R}^+$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\sum_{j=1}^n R_{i,j} = \sum_{j=1}^n (P_{i,j})^2 = 1 = \sum_{j=1}^n (P_{j,i})^2 = \sum_{j=1}^n R_{j,i}$ car les rangées de $R \in O_n(\mathbb{R})$

sont unitaires pour les normes euclidiennes classiques

Ainsi la matrice R est bistochastique

Dans la construction précédente, on a le choix pour la matrice $D(A)$ qui est diagonale et semblable à A et la matrice $D(B)$ est diagonale et semblable à $QB {}^tQ$ donc à B .

Ainsi l'énoncé est maladroite car le résultat dépend des choix faits à la question précédente ; quitte à changer P et Q , on peut effectivement réordonner les valeurs propres de façon à ce qu'elles se retrouvent dans l'ordre voulu dans D_A et D_B

On peut donc supposer que $D_A = \text{diag}(\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A))$ et $D_B = \text{diag}(\lambda_1(B), \dots, \lambda_n(B))$

On note $D_AP - PD_B = (m_{i,j})$

On a pour i et $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $m_{i,j} = \lambda_i(A)P_{i,j} - P_{i,j}\lambda_j(B) = P_{i,j}(\lambda_i(A) - \lambda_j(B))$

$$\text{et } \|D_AP - PD_B\|^2 = \text{tr}({}^t(D_AP - PD_B)(D_AP - PD_B)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}^2$$

$$\text{donc } \|D_AP - PD_B\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (P_{i,j})^2 (\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{i,j} |\lambda_i(A) - \lambda_j(B)|^2$$

On a bien montré que $\|A - B\|^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} R_{i,j} |\lambda_i(A) - \lambda_j(B)|^2$

$$18. \text{ On considère l'application } \varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ M = (m_{i,j}) & \longmapsto \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} |\lambda_i(A) - \lambda_j(B)|^2 \end{cases}$$

φ est une forme linéaire donc d'après 14, $\inf_{M \in \mathcal{B}_n} \varphi(M)$ existe et est atteint en une matrice de permutation M_{σ_0} .

donc $\varphi(M_{\sigma_0}) \leq \varphi(R)$ car $R \in \mathcal{B}_n$

et on a $\min_{M \in \mathcal{B}_n} \varphi(M) = \min_{M \in \mathcal{P}_n} \varphi(M) = \varphi(M_{\sigma_0}) = \min_{\sigma \in S_n} \varphi(M_{\sigma})$

Pour une permutation σ , on a $\varphi(M_{\sigma}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (M_{\sigma})_{i,j} |\lambda_i(A) - \lambda_j(B)|^2 = \sum_{j=1}^n |\lambda_{\sigma(j)}(A) - \lambda_j(B)|^2$

On a bien

$$\boxed{\min_{\sigma} \sum_{j=1}^n |\lambda_{\sigma(j)}(A) - \lambda_j(B)|^2 \leq \|A - B\|^2}$$

où le minimum porte sur l'ensemble de toutes les permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$.

19. **Remarque 1 :** Le sujet cache le problème de l'existence d'une variable aléatoire définie sur un univers quelconque de loi uniforme prenant ses valeurs dans ensemble à n éléments .

Or si je prends un univers Ω ayant au moins deux éléments et la tribu $\mathcal{T}$ ayant comme élément un singleton $\{a\}$ de probabilité : $\mathbb{P}(\{a\}) = \frac{2}{3}$.

Alors pour tout $n > 1$, **on ne pourra pas** trouver de variable X suivant une loi uniforme à valeurs dans un ensemble ayant n éléments car $\frac{1}{n} < \frac{2}{3}$.

Par conséquent, je **considérerai** qu'il existe une variable aléatoire Z de $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ tel que Z suive la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ c'est à dire que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(Z = i) = 1/n$

Remarque 2 : La question est fausse si on n'impose pas que les a_i et les b_i sont distincts

Je prends $n = 3$ et $a'(1) = a'(2) = 0 = b'(1)$ et $a'(3) = 1 = b'(2) = b'(3)$ alors P_1 et P_2 sont des lois uniforme sur $\{a'(1), a'(2), a'(3)\} = \{0, 1\}$ qui sont des lois de Bernoulli de paramètre $1/2$. Ainsi si $X \sim Y \sim P_1$, alors X et $Y \in V$.

En prenant $X = Y$, on a $E(|X - Y|)^2 = 0$ donc $d^2(P_1, P_2) = 0$

En appliquant la formule de l'énoncé, on obtient $0 = \frac{1}{3} (0^2 + 1^2 + 0^2)$

En fait, la question ainsi posée est maladroite. La loi uniforme devrait porter sur les indices dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ par x ou $y : \omega \in \Omega \mapsto i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et puis compositions avec $a : i \mapsto a(i)$ ou $b : i \mapsto b(i)$, on construit les variables aléatoires $X = a \circ x$ et $Y = b \circ y$.

Je refuse de formaliser plus avant (la preuve est plus délicate à rédiger) ; c'est pour cela que je **considérerai** que

$$a(1) < \dots < a(n) \text{ et } b(1) < \dots < b(n)$$

On considère X et $Y \in V$ telles que $X \sim P_1$ et $Y \sim P_2$

Je définis la matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs par : $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, R_{i,j} = nP((X, Y) = (a(i), b(j)))$

Ainsi pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\sum_{j=1}^n R_{i,j} = nP(X = a(i)) = 1$ et $\sum_{j=1}^n R_{j,i} = 1$ de sorte que $R \in \mathcal{B}_n$

En utilisant la formule du transfert avec la fonction $(x, y) \mapsto |x - y|^2$, on a

$$E(|X - Y|^2) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a(i) - b(j)|^2 P((X, Y) = (a(i), b(j))) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i, j \leq n} R_{i,j} |a(i) - b(j)|^2$$

Comme en 18 (à l'aide de 14) il existe $\Pi \in \mathcal{P}_n$ telle que

$$\forall M \in \mathcal{B}_n, \sum_{1 \leq i, j \leq n} \Pi_{i,j} |a(i) - b(j)|^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} M_{i,j} |a(i) - b(j)|^2$$

Soit σ la permutation telle que $\Pi = M_\sigma$, ainsi on a $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \Pi_{i,j} |a(i) - b(j)|^2 = \sum_{1 \leq j \leq n} |a(\sigma(j)) - b(j)|^2$

Montrons que $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sigma(j) = j$. Par l'absurde, on suppose que $\{j \in \llbracket 1, n \rrbracket / \sigma(j) \neq j\} \neq \emptyset$.

On note j_0 le plus petit élément de cette partie non vide de $\mathbb{N}$ et $j_1 = \sigma(j_0)$ et $j' = \sigma^{-1}(j_0)$.

Nécessairement on a $j_1 > j_0$ et $j' > j_0$

On a $(|a(j_1) - b(j_0)|^2 + |a(j_0) - b(j')|^2) - (|a(j_0) - b(j_0)|^2 + |a(j_1) - b(j')|^2) = \dots$
 $\dots = -2(a(j_1)b(j_0) + a(j_0)b(j') - a(j_0)b(j_0) - a(j_1)b(j'))$

donc $(|a(j_1) - b(j_0)|^2 + |a(j_0) - b(j')|^2) - (|a(j_0) - b(j_0)|^2 + |a(j_1) - b(j')|^2) = 2(a(j_1) - a(j_0))(b(j') - b(j_0)) > 0$
 de sorte que $(|a(j_1) - b(j_0)|^2 + |a(j_0) - b(j')|^2) > (|a(j_0) - b(j_0)|^2 + |a(j_1) - b(j')|^2)$

On considère la transposition τ qui échange j_0 et j_1 ,

de sorte que $\tau \circ \sigma(j_0) = j_0$, $\tau \circ \sigma(j') = j_1$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{j_0, j'\}$, $\tau \circ \sigma(i) = \sigma(i)$

On note $M \in \mathcal{P}_n$ la matrice de permutation associée à $\tau \circ \sigma$

D'après l'inégalité précédente $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \Pi_{i,j} |a(i) - b(j)|^2 > \sum_{1 \leq i, j \leq n} M_{i,j} |a(i) - b(j)|^2$

ce qui est en contradiction avec la choix de la matrice Π

Ainsi $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sigma(j) = j$ et donc $\Pi = I_n$

Ainsi $E(|X - Y|^2) \geq \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \Pi_{i,j} |a(i) - b(j)|^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a(i) - b(i)|^2$

ceci prouve l'existence de $d^2(P_1, P_2) = \inf_{\substack{X, Y \in V \\ X \sim P_1, Y \sim P_2}} E(|X - Y|^2)$ et que $d^2(P_1, P_2) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a(i) - b(i)|^2$

Je considère $\tilde{X} = a \circ Z$ et $\tilde{Y} = b \circ Z$ où Z est la variable aléatoire de la remarque 1.

Ainsi $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ sont dans V et $\tilde{X} \sim P_1$ et $\tilde{Y} \sim P_2$

et la matrice I_n vérifie $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(I_n)_{i,j} = nP((X, Y) = (a(i), b(j)))$

ainsi $E(|\tilde{X} - \tilde{Y}|^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a(i) - b(i)|^2$

d'où la borne inférieure est un minimum et $d^2(P_1, P_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a(i) - b(i)|^2$

On considère les matrices symétriques réelles A, B de valeurs propres respectives $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$.

En utilisant la question 18, on a $\min_{\sigma} \sum_{j=1}^n |a(\sigma(j)) - b(j)|^2 \leq \|A - B\|^2$

où le minimum porte sur l'ensemble de toutes les permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$.

En utilisant ce qui précède le minimum est atteint en l'identité donc $\sum_{j=1}^n |a(j) - b(j)|^2 \leq \|A - B\|^2$

On conclut facilement....