Problème : formule des compléments

A/ Quelques résultats sur la fonction Γ

1/ Les fonctions $t \mapsto \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$ et $t \mapsto (1-u)^n u^{x-1}$ sont continues respectivement sur $]0,n]$ et sur $]0,1]$. En 0 elles sont équivalentes à t^{x-1} et elles sont intégrables sur $]0,1]$ si et seulement si $1-x<1$ soit $x>0$. Les deux fonctions I_n et u_n sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

2/
- Soit $t \geqslant 0$. Si $n>t$, alors $g_n(t) = \exp(n\ln(1-\frac{t}{n}))t^{x-1}$. Puisque $n\ln(1-\frac{t}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\frac{t}{n} = -t$, on obtient, $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(t) = e^{-t}t^{x-1}$. La suite (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $g : t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$.
- Si $t \in]0,n[$, alors $0 \leqslant g_n(t) = (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}$. De plus $0 < 1-\frac{t}{n} < 1$, donc $\ln(1-\frac{t}{n}) \leqslant -\frac{t}{n}$, et $0 \leqslant (1-\frac{t}{n})^n \leqslant (\exp(-\frac{t}{n}))^n = e^{-t}$. Si $t \geqslant n$, on a $0 \leqslant g_n(t) = 0 \leqslant \exp(-t)t^{x-1}$. Ainsi, pour tout $t>0$, on a $0 \leqslant g_n(t) \leqslant e^{-t}t^{x-1}$.

Les questions précédentes donnent :
- pour tout $n \geqslant 1$, g_n est continue sur $]0,+\infty[$,
- Pour tout $t>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(t) = t^{x-1}e^{-t} = g(t)$,
- la fonction g est continue sur $]0,+\infty[$,
- pour tout $n \geqslant 1$, $t>0$, $|g_n(t)| \leqslant t^{x-1}e^{-t} = \varphi(t)$, et φ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Le théorème de convergence dominée s'applique et $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt = \Gamma(x)$.
Or
$$\int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt.$$
Cela termine la question.

3/ a/ On intègre par parties avec $n \geqslant 1$ et $x>0$. On a (les fonctions qui apparaissent sont $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$ et les limites nécessaires existent en 0)
$$\begin{aligned} u_n(x) &= \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,du = \left[(1-u)^n\frac{u^x}{x}\right]_0^1 + \frac{n}{x}\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^x\,du \\ &= \frac{n}{x}u_{n-1}(x+1). \end{aligned}$$
On a par conséquent $u_n(x) = \frac{n}{x}u_{n-1}(x)$.

b/ En utilisant la relation de récurrence précédente, on obtient
$$\begin{aligned} u_n(x) &= \frac{n}{x}\frac{n-1}{x+1}\cdots\frac{1}{x+n-1}u_0(n+x) = \frac{n}{x}\frac{n-1}{x+1}\cdots\frac{1}{x+n-1}\frac{1}{x+n} \\ &= \frac{1}{n^x}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}. \end{aligned}$$
Il reste à transformer $u_n(x)$ en $I_n(x)$. La fonction $u \mapsto (1-u)^n u^{x-1}$ est intégrable sur $]0,1]$. On considère la bijection de classe $\mathscr{C}^1$
$$\theta : \left\{\begin{array}{ccc}]0,n] & \to &]0,1] \\ u & \mapsto & \frac{u}{n} \end{array}\right.$$
qui permet de réaliser le changement de variable, et donne
$$u_n(x) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \left(\frac{t}{n}\right)^{x-1}\frac{dt}{n} = \frac{1}{n^x}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = \frac{1}{n^x}I_n(x).$$
On obtient enfin $I_n(x) = n^x u_n(x) = \dfrac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$. D'après la question précédente, on a finalement
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = \Gamma(x).$$

B/ Formule des compléments - première version

4/ a/ La fonction g est continue sur $]0,x]$. Pour $t \in]0,x]$, on a $g(t) = \dfrac{\cos t}{\sin t} - \dfrac{1}{t} = \dfrac{t\cos t - \sin t}{t\sin t}$. Un développement limité donne $t\cos t - \sin t = O(t^3)$ et $t\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t^2$. Donc $g(t) = O(t)$ au voisinage de 0 et $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = 0$. La fonction g est continue sur $[0,x]$. Soit $0<\varepsilon<x$. On a $\int_\varepsilon^x g(t)\,dt = \left[\ln\frac{\sin t}{t}\right]_\varepsilon^x = \ln\dfrac{\sin x}{x} - \ln\dfrac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}$. Puisque la limite de $u \mapsto (\sin u)/u$ en 0 vaut 1, lorsque ε tend vers 0, on obtient $\int_0^x g(t)\,dt = \ln\dfrac{\sin x}{x}$.

b/ Pour $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$, on a $\operatorname{cotan}(\alpha\pi) - \dfrac{1}{\alpha\pi} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)}$. Si $t \in]0, x] \subset]0, \pi[$, il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $t = \alpha\pi$, et $g(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t/\pi}{\pi(t^2/\pi^2 - n^2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}$. La relation est valable également pour $t = 0$. Pour tout $t \in [0, x]$, on a $\left|\dfrac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}\right| \leqslant \dfrac{2x}{n^2\pi^2 - x^2}$, terme général d'une série convergente. La série donnée converge normalement sur $[0, x]$.

c/ Notons, pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, x]$, $S_N(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}$. La continuité de chacune des fonctions et la convergence normale de la série précédente sur $[0, x]$, permet d'intégrer terme à terme et ainsi d'obtenir

$$\int_0^x g(t)\,dt = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_0^x \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}\,dt.$$

Or, $\displaystyle\int_0^x \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}\,dt = \left[\ln|t^2 - n^2\pi^2|\right]_0^x = \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$. Cela donne $\ln\dfrac{\sin x}{x} = \displaystyle\lim_{N\to+\infty} \ln\prod_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ et par conséquent $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = \frac{\sin x}{x}$. Finalement, pour tout $x \in]0, \pi[$, on a $\sin x = x\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

5/ On va simplifier $I_n(x)I_n(1-x)$ si $x \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} I_n(x)I_n(1-x) &= \frac{n^x n!}{\left(\prod_{k=0}^{n}(k+x)\right)} \frac{n^{1-x} n!}{\left(\prod_{k=0}^{n}(k+1-x)\right)} = \frac{n(n!)^2}{\left(\prod_{k=0}^{n}(k+x)\right)\left(\prod_{k=1}^{n+1}(k-x)\right)} \\ &= \frac{n}{x(n+1-x)} \frac{(n!)^2}{\prod_{k=1}^{n}(k^2 - x^2)} = \frac{n}{x(n+1-x)} \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1 - \frac{x^2}{k^2})}. \end{aligned}$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{1}{x\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}(1 - \frac{x^2}{n^2})} = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

C/ Un calcul d'intégrales

6/ a/ Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$. La fonction est continue sur $]0, +\infty[$. On a $f(x) \underset{x\to0}{\sim} x^{\alpha-1}$ et f est intégrable sur $]0, 1]$ car $\alpha > 0$ et $\alpha - 1 > -1$. On a ensuite $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{\alpha-2} = \dfrac{1}{x^{2-\alpha}}$ et f est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $2 - \alpha > 1$ puisque $\alpha < 1$.

b/ L'application $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1]$. On alors (avec « $x = 1/u$ »)

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \int_{+\infty}^1 \frac{u^{1-\alpha}}{1 + \frac{1}{u}}\left(-\frac{du}{u^2}\right) = \int_1^{+\infty} \frac{u^{-\alpha}}{1+u}\,du \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{u^{(1-\alpha)-1}}{1+u}\,du = J(1-\alpha). \end{aligned}$$

7/ a/ Pour $x \in]0, 1]$, on a $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ et $\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+\alpha-1}$. On a $\displaystyle\int_0^1 x^{n+\alpha-1}\,dx = \frac{1}{n+\alpha}$ ce qui nous incite à réaliser une permutation somme-intégrale. Le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas ($\sum \dfrac{1}{n+\alpha}$ diverge). On note $S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+\alpha-1}$. La suite de fonctions S_N converge simplement sur $]0, 1]$ vers $S : x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$, fonction continue sur $]0, 1]$. La suite $(x^{n+\alpha-1})$ est décroissante vers 0, on peut appliquer le théorème des séries alternées et majorer $|S_N(x)| \leqslant |(-1)^0 x^{0+\alpha-1}| = x^{\alpha-1}$. La fonction $\mapsto x^{\alpha-1}$ est intégrable sur $]0, 1]$ car $\alpha - 1 > -1$. On peut appliquer le théorème de convergence dominée et obtenir

$$\begin{aligned} \lim_{N\to+\infty} \int_0^1 S_N(x)\,dx &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (-1)^n x^{n+\alpha-1}\,dx \\ &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} = \int_0^1 S(x)\,dx. \end{aligned}$$

On obtient bien $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$.

b/ On calcule alors $I(\alpha)+J(\alpha)=I(\alpha)+I(1-\alpha)$ avec α et $1-\alpha$ tous les deux dans $]0,1[$ ce qui permet d'appliquer le résultat précédent. On a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha+n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-\alpha+n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha+n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\alpha}\\ &= \frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n+\alpha}-\frac{1}{n-\alpha}\right)\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx=\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{-2\alpha}{n^2-\alpha^2}\right)=\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\right)=\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

8/ La fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}_+$ et équivaut à $\frac{1}{x^\beta}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\beta>1$. On a alors, en posant « $x=t^\beta$ » (l'application $x\mapsto x^{1/\beta}$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui même),

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^\beta}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x}\left(\frac{1}{\beta}x^{1/\beta-1}\right)dx=\frac{1}{\beta}I(\frac{1}{\beta}).$$

Puisque $\frac{1}{\beta}\in]0,1[$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^\beta}\,dt=\frac{\pi/\beta}{\sin(\pi/\beta)}$.

D/ f_α, fonction Γ et seconde démonstration pour la formule des complèments

9/ a/ La fonction g_α est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $g_\alpha(t)\underset{t\to0}{\sim}t^{\alpha-1}$ donc g_α est intégrable sur $]0,1]$ et $g_\alpha(t)=\underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc intégrable sur $[1,+\infty[$.

b/ On applique le théorème de dérivation. Soit $h(x,t)=\frac{t^{\alpha-1}}{t+a}e^{-xt}$ pour $x>0$ et $t>0$.

— d'après la question précédente, pour tout $x>0$, $t\mapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$,

— pour tout $t>0$, $x\mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)=-t\frac{t^{\alpha-1}}{t+a}e^{-xt}=-\frac{t^\alpha}{t+a}e^{-xt}$,

— pour tout $x>0$, $t\mapsto-\frac{t^\alpha}{t+a}e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$,

— soit $A>0$, pour tout $t>0$ et $x\geqslant A$, on a $\left|-\frac{t^\alpha}{t+a}e^{-xt}\right|\leqslant\frac{t^\alpha}{t+a}e^{-At}=\varphi_A(t)$. La fonction φ_A est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que f_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[A,+\infty[$ avec $f_\alpha'(x)=-\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{t+a}e^{-xt}\,dt=-f_{\alpha+1}(x)$. Ceci étant valable pour tout $A>0$, la fonction f_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

10/ a/ On majore $|f_\alpha(x)|\leqslant\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{a}e^{-xt}\,dt$ (la dernière intégrale existe bien car $\alpha-1>-1$ ce qui donne l'intégrabilité sur $]0,1]$). On effectue le changement variable linéaire $u=xt$ ou $t=u/x$, ce qui donne

$$|f_\alpha(x)|\leqslant\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}}e^{-u}\frac{du}{x}=\frac{1}{ax^\alpha}\int_0^{+\infty}u^{\alpha-1}e^{-u}\,du=\frac{\Gamma(\alpha)}{a}x^{-a}.$$

b/ On a

$$\begin{aligned}af_\alpha(x)-f_\alpha'(x) &= af_\alpha(x)+f_{\alpha+1}(x)\\ &= =\int_0^{+\infty}a\frac{t^{\alpha-1}}{t+a}e^{-xt}\,dt+\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{t+a}e^{-xt}\,dt\\ &= \int_0^{+\infty}(a+t)\frac{t^{\alpha-1}}{t+a}e^{-xt}\,dt\end{aligned}$$

ainsi $af_\alpha(x)-f_\alpha'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-xt}\,dt$ et le changement affine $u=xt$ donne $af_\alpha(x)-f_\alpha'(x)=\frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.

11/ Pas mal de travail à faire. On note $f(x)=f_\alpha(x)e^{-ax}$ et $g(x)=\Gamma(\alpha)\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-at}}{t^\alpha}\,dt$.

— La fonction f est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $f'(x)=\big(f_\alpha'(x)-af_\alpha(x)\big)e^{-ax}=-\frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}e^{-ax}$.

— La fonction $t\mapsto\frac{e^{-at}}{t^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est intégrable sur $[1,+\infty[$ et également sur tout $[x,+\infty[$ si $x>0$. Cela garantit l'existence de g. De plus, si $x>0$, $g(x)=\Gamma(\alpha)\left(\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-at}}{t^\alpha}\,dt-\int_1^x\frac{e^{-at}}{t^\alpha}\,dt\right)$. On en déduit que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $g'(x)=-\Gamma(\alpha)\frac{e^{-ax}}{x^\alpha}$.

— Pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = g'(x)$. Il existe donc une constante C telle que $f = g + C$.

— Pour déterminer C, on n'a pas de valeur de x qui donne de calculs simples. On passe à la limite en $+\infty$. La dernière écriture de $g(x)$ montre que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. On a également avec l'inégalité de la question précédente, $|f(x)| \leqslant \frac{\Gamma(\alpha)}{a}x^{-\alpha}e^{-ax}$ et f est aussi de limite nulle en $+\infty$.

— Finalement $C = 0$ et $f = g$.

12/ On a déjà, pour tout $x > 0$, $\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{t+a}e^{-xt}\,dt = \Gamma(\alpha)e^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-at}}{t^\alpha}\,dt$. On essaie de faire tendre x vers 0.

— Puisque $\alpha < 1$, $t \mapsto \frac{e^{-at}}{t^\alpha} \underset{t\to0}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable ur $]0,1]$. Ainsi $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}}{t^\alpha}\,dt$ converge et

$$\lim_{x\to0}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-at}}{t^\alpha}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}}{t^\alpha}\,dt.$$

— Soit $h(x,t) = \frac{t^{\alpha-1}}{t+a}e^{-xt}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^*$. On a les différentes hypothèses de continuités partielles et $|h(x,t)| \leqslant \frac{t^{\alpha-1}}{t+a} = \varphi(t)$. Cette fonction est continue sur $]0,+\infty[$, $\varphi(t) \underset{t\to0}{\sim} \frac{1}{at^{1-\alpha}}$ et $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2-\alpha}}$. Puisque $\alpha \in]0,1[$, la fonction φ est intégrable sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$. Le théorème de continuité s'applique et $x \mapsto \int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{t+a}e^{-xt}\,dt$ est continue sur $[0,+\infty[$.

— Finalement la limite lorsque x tend vers 0 donne $\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{t+a}\,dt = \Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}}{t^\alpha}\,dt$.

13/ a/ On utilise la relation précédente avec $a = 1$:

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,dt = \Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,dt = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha).$$

Dans la partie précédente on a obtenu $\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,dt = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$. Cela donne le résultat.

b/ On prouve l'existence de l'intégrale, on effectue le changement de variable $u = t^2$, ce qui donne $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}u^{1/2-1}e^{-u}\,du = \frac{1}{2}\Gamma(1/2)$. la question précédente avec $\alpha = 1/2$ donne $\Gamma(1/2)^2 = \pi$ et puisque $\Gamma > 0$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Finalement $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.