Problème : formule des compléments

A/ Quelques résultats sur la fonction Γ

On définit, pour $x>0$, $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$. On rappelle que Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement positive et que, pour tout $x>0$, $\Gamma'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}(\ln t)\,t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

On note, pour $n\in\mathbb{N}^*$, lorsque c'est possible,

$$I_n(x)=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt \text{ et } u_n(x)=\int_0^1(1-u)^n u^{x-1}\,du$$

1/ Déterminer l'ensemble de définition de I_n et de u_n pour $n\in\mathbb{N}^*$.

2/ Pour n entier naturel $\geqslant 1$, on définit la fonction g_n de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(t)=\begin{cases}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } 0\leqslant t<n,\\ 0 & \text{si } t\geqslant n\end{cases}$$

À l'aide de cette fonction, justifier que, pour tout $x>0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(x)=\Gamma(x)$.

3/ a/ Trouver une relation entre $u_n(x)$ et $u_{n-1}(x+1)$ lorsque $n\geqslant 1$ et $x>0$.

b/ En déduire la relation, pour $x>0$, $\Gamma(x)=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

B/ Formule des compléments - première version

On admettra que si α est un réel non entier, alors on a $\operatorname{cotan}(\alpha\pi)=\dfrac{1}{\alpha\pi}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2-n^2)}$.

4/ Soit $x\in]0,\pi[$. On définit la fonction g sur $[0,x]$ par $g(t)=\operatorname{cotan} t-\frac{1}{t}$ si $x\neq 0$,et $g(0)=0$.

a/ Prouver que g est continue sur $[0,x]$ et calculer $\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$.

b/ Montrer que, pour tout $t\in[0,x]$, on a $g(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2t}{t^2-n^2\pi^2}$ et que la série de fonctions $\sum f_n$ (où $f_n(t)=\dfrac{2t}{t^2-n^2\pi^2}$) converge normalement sur $[0,x]$.

c/ Montrer que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)=\frac{\sin x}{x}$. On notera si besoin $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

5/ Déduire des questions précédentes que, si $x\in]0,1[$, alors $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

C/ Un calcul d'intégrales

On admet la relation suivante : si $\alpha\in]0,1[$, on a

$$\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}=\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

On suppose dans les questions suivantes que $\alpha\in]0,1[$.

6/ a/ Montrer que la fonction $x\mapsto\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$ puis sur $[1,+\infty[$. On note alors

$$I(\alpha)=\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx \quad\text{et } J(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx.$$

b/ Déterminer une relation entre $I(\alpha)$ et $J(1-\alpha)$.

7/ a/ Montrer que

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha+n}$$

b/ En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

8/ Déterminer pour quelles valeurs positives de β, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^\beta}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. En effectuant un changement de variable simple, déterminer

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\beta}\,dt.$$

D/ f_α, fonction Γ et seconde démonstration pour la formule des complèments

Dans cette partie, a désignera un nombre réel strictement positif et α un réel strictement positif.

9/ a/ Montrer que, pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $g_\alpha : t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+a} e^{-xt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. On note alors f_α la fonction définie, pour $x>0$, par

$$f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+a} e^{-xt}\,dt.$$

b/ Montrer que f_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $-f_{\alpha+1}$.

10/ a/ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $|f_\alpha(x)| \leqslant \dfrac{\Gamma(\alpha)}{a} x^{-\alpha}$.

b/ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $a f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.

11/ Montrer alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f_\alpha(x) e^{-ax} = \Gamma(\alpha) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t^\alpha}\,dt$.

Dans la suite, on suppose que $\alpha \in]0,1[$ et a désigne toujours un nombre réel strictement positif.

12/ Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+a}\,dt = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t^\alpha}\,dt$.

13/ a/ En déduire la relation $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$.

b/ Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.