ÉCOLE POLYTECHNIQUE FILIÈRE MP

CONCOURS D'ADMISSION 2007

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Relations de commutation

Dans ce problème, on se propose de décrire les triplets (K, E, F) où K, E, F sont trois endomorphismes d'un espace vectoriel satisfaisant certaines relations de commutation. On désignera toujours par q un nombre complexe non nul et tel que pour tout entier $n > 0$, $q^n \neq 1$.

Première partie

Dans cette partie, on désigne par X un espace vectoriel complexe de dimension finie $n \geqslant 2$, et par $(x_1, \ldots, x_n)$ une base de X.

1. Soit A un endomorphisme de X représenté dans la base $(x_1, \ldots, x_n)$ par une matrice diagonale de coefficients diagonaux $a_1, \ldots, a_n$ deux à deux distincts. Montrer que tout endomorphisme B de X, commutant à A, est aussi représenté par une matrice diagonale.

2. Soit $A_1, \ldots, A_p$ des endomorphismes de X.

2.a) Montrer que, si les seuls sous-espaces vectoriels de X stables par $A_1, \ldots, A_p$ sont $\{0\}$ et X, alors tout endomorphisme B de X, commutant à $A_1, \ldots, A_p$, est un multiple scalaire de l'identité.

2.b) La réciproque est-elle vraie ?

Deuxième partie

On définit X et $(x_1, \ldots, x_n)$ comme à la première partie. On note K_0 et F_0 les endomorphismes de X définis comme suit :

$$\forall p = 1, \ldots, n \quad , \quad K_0\, x_p = q^{n+1-2p}\, x_p \quad , \quad F_0\, x_p = \begin{cases} x_{p+1} & \text{si } p < n \\ 0 & \text{si } p = n \end{cases} .$$

3. Calculer $K_0\,F_0 - q^{-2}F_0\,K_0$.

4. Déterminer les sous-espaces vectoriels de X stables par F_0, puis ceux stables par F_0 et K_0.

On définit un troisième endomorphisme E_0 de X par

$$E_0\,x_p = \begin{cases} (q-q^{-1})^{-2}(q^{p-1}-q^{1-p})(q^{n+1-p}-q^{p-n-1})\,x_{p-1} & \text{si} \quad p>1 \\ 0 \quad \text{si} \quad p=1 \end{cases} .$$

5. Calculer $K_0\,E_0 - q^2E_0\,K_0$.

6. Vérifier la relation

$$E_0\,F_0 - F_0\,E_0 = (q-q^{-1})^{-1}(K_0 - K_0^{-1}) .$$

7. Déterminer les sous-espaces vectoriels de X stables par K_0, E_0, F_0.

Troisième partie

Dans cette partie, on désigne par K et E deux endomorphismes d'un espace vectoriel complexe X de dimension n satisfaisant les conditions suivantes :

i) $KE = q^2EK$
ii) K est inversible
iii) E est non nul.

Pour tout nombre complexe λ on pose

$$X_\lambda = \text{Ker }(K-\lambda I) \quad , \quad Y_\lambda = \text{Ker }(E-\lambda I) .$$

8. Vérifier les relations

$$E(X_\lambda) \subset X_{q^2\lambda} \quad , \quad K(Y_\lambda) \subset Y_{q^{-2}\lambda} .$$

9. Montrer que Y_λ est réduit à $\{0\}$ si λ est non nul.

10. Indiquer un nombre entier $r>0$ tel que $E^r = 0$.

11. Montrer qu'il existe un élément x non nul de Ker E, vecteur propre pour K.

12. On suppose X de dimension 2, et on se propose de démontrer l'existence d'une base (x_1, x_2) de X possédant les propriétés suivantes :

(P1) $K\,x_1 = \lambda\,x_1$ où λ est un scalaire convenable
(P2) $K\,x_2 = q^{-2}\lambda\,x_2$

(P3) $E\,x_1 = 0$

(P4) $E\,x_2 = x_1$.

12.a) Montrer qu'il existe un vecteur x_1^0 et un scalaire λ tels que l'on ait

$$K\,x_1^0 = \lambda\,x_1^0 \quad \text{et} \quad E\,x_1^0 = 0\ .$$

On note x_2^0 un vecteur non nul et non proportionnel à x_1^0.

12.b) Montrer que le vecteur $E\,x_2^0$, qu'on note x_1, est un multiple non nul de x_1^0.

12.c) Montrer qu'il existe un scalaire β tel que

$$K\,x_2^0 = \beta\,x_1 + q^{-2}\lambda\,x_2^0\ .$$

12.d) Trouver un scalaire α tel que les vecteurs x_1 et $x_2 = x_2^0 + \alpha\,x_1$ répondent à la question.

Quatrième partie

Dans cette quatrième partie on désigne par X un espace vectoriel complexe de dimension $n \geqslant 2$ et on considère un triplet (K, E, F) d'endomorphismes de X satisfaisant les conditions suivantes :

i) K est inversible, $K^2 \neq I$

ii) $KE = q^2EK$

iii) $KF = q^{-2}FK$

iv) $EF - FE = (q - q^{-1})^{-1}(K - K^{-1})$

v) les seuls sous-espaces vectoriels de X, stables par K, E, F, sont $\{0\}$ et X.

13. Vérifier que, pour tout entier $m > 0$, on a

$$EF^m - F^mE = (q - q^{-1})^{-2}(q^m - q^{-m})\,F^{m-1}\,(q^{1-m}K - q^{m-1}K^{-1})\ .$$

Dans ce qui suit, on note ν_1 un vecteur non nul de X, annulé par E et vecteur propre de K pour une certaine valeur propre que l'on notera λ. Pour tout entier $m > 0$, on pose $\nu_m = F^{m-1}\,\nu_1$.

14. Calculer $K\,\nu_m$.

15. Démontrer la relation

$$\forall m \geqslant 2 \quad , \quad E\,\nu_m = (q - q^{-1})^{-2}(q^{m-1} - q^{1-m})(q^{2-m}\lambda - q^{m-2}\lambda^{-1})\,\nu_{m-1}\ .$$

16. Démontrer les assertions suivantes :

16.a) Ceux des vecteurs ν_m qui sont non nuls, sont linéairement indépendants.

16.b) Il existe $m_0 \geqslant 1$ tel que $\nu_m = 0$ pour tout $m > m_0$ et que $\nu_1, \ldots, \nu_{m_0}$ soient linéairement indépendants.

16.c) On a $m_0 = n$.

16.d) On a $\lambda = \pm q^{n-1}$.

17. Comparer le triplet (K, E, F) avec le triplet (K_0, E_0, F_0) considéré à la deuxième partie.

*   *
*