Majoration du rayon spectral de la matrice de Hilbert

Une propriété de Perron-Frobenius

1. La matrice est directement symétrique. Pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ décrit comme dans l'énoncé, on a

$$^tXH_nX = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} h_{i,j}^{(n)} x_i x_j = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{i+j+1} x_i x_j$$

D'un autre côté, on a avec $\tilde{X}(t)$,

$$\int_0^1 \tilde{X}(t)^2 \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i t^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} x_j t^j\right)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^1 x_i x_j t^{i+j}\mathrm{d}t = {}^tXH_nX$$

On a donc $^tXH_nX \geqslant 0$ et, puisque $t \mapsto \tilde{X}(t)^2$ est continue et positive sur $[0,1]$, le terme est nul si et seulement si le polynôme $\tilde{X}$ est nul. Cela équivaut à $X = 0$. La matrice H_n est bien symétrique définie positive.

2. Si $X \in \mathcal{V}$ alors $H_nX = \rho_n X$ et $^tXH_nX = \rho_n {}^tXX = \rho_n \|X\|^2$. Réciproquement, si on note $X_1, \dots, X_n$ une base de vecteur propre associée aux valeurs propres $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n = \rho_n$ de H_n, on a, si $X = \sum_{i=1}^n y_i X_i$,

$$^tXH_nX = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$$

On a alors $^tXH_nX - \rho_n \|X\|^2 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \rho_n) y_i^2$. Chaque terme de la somme est négatif. Si la somme est nulle alors chaque terme est nul, c'est-à-dire $(\lambda_i - \rho_n) y_i^2 = 0$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$. Cela revient à dire que chaque $y_i = 0$ lorsque $\lambda_i < \rho_n$. Le vecteur X est donc dans $\mathcal{V}$.

3. On a

$$^tX_0H_nX_0 = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} h_{i,j}^{(n)} x_i x_j \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} h_{i,j}^{(n)} |x_i||x_j| = {}^t\left|X_0\right| H_n \left|X_0\right|.$$

Si $X_0 \in \mathcal{V}$, alors $^tX_0H_nX_0 = \rho_n \left\|X_0\right\|^2 \leqslant {}^t\left|X_0\right| H_n \left|X_0\right|$. Or, on a toujours $^t\left|X_0\right| H_n \left|X_0\right| \leqslant \rho_n \left\|\left|X_0\right|\right\|^2 = \rho_n \left\|X_0\right\|^2$. Finalement on a

$$^t\left|X_0\right| H_n \left|X_0\right| = \rho_n \left\|\left|X_0\right|\right\|^2 \text{ et } \left|X_0\right| \in \mathcal{V}.$$

4. On vient d'obtenir $H_n \left|X_0\right| = \rho_n \left|X_0\right|$. Si l'une des coordonnées de $H_n \left|X_0\right|$ est nulle - supposons la coordonnées i_0 - alors la ligne i_0 de cette relation donne

$$\sum_{j=1}^n h_{i_0,j}^{(n)} |x_j| = 0$$

Puisque tous les termes sont positifs, ils sont tous nuls. Ainsi $\left|X_0\right|$ serait nul et X_0 également ce qui est exclu. Si X_0 a une coordonnée nulle alors $\left|X_0\right|$ aussi et $H_n \left|X_0\right| = \rho_n \left|X_0\right|$ également donc X_0 est nul - toujours exclu.

5. Supposons que X_0 et Y_0 sont deux vecteurs propres linéairement indépendants de $\mathcal{V}$. Leurs coordonnées sont toutes non nulles, notamment la première de chacun (on les note x_0 et y_0). Le vecteur $y_0X_0 - x_0Y_0$ est un vecteur propre de $\mathcal{V}$ dont la première coordonnée est nulle. C'est donc le vecteur nul et X_0 et Y_0 ne sont pas linéairement indépendants. On en déduit que $\boxed{\dim \mathcal{V} = 1}$.

Inégalité de Hilbert

6. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. D'une part

$$\int_{-1}^1 P(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^n a_k \int_{-1}^1 t^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^n a_k \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}\mathrm{d}\theta &= \sum_{k=0}^n a_k \int_0^\pi e^{i(k+1)\theta}\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^n a_k \left[\frac{e^{i(k+1)\theta}}{i(k+1)}\right]_0^\pi = \sum_{k=0}^n a_k \frac{e^{i(k+1)\pi}-1}{i(k+1)} \\ &= i\sum_{k=0}^n a_k \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1)}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\left|\int_{-1}^1 P(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_0^\pi |P(e^{i\theta})|\mathrm{d}\theta.$$

ce qui donne

$$^tXH_nX = \int_0^1 (\tilde{X}(t))^2\mathrm{d}t \leqslant \int_0^\pi |\tilde{X}(e^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta.$$

7. On essaie de calculer l'intégrale obtenue (les coefficients de $\tilde{X}$ sont réels) :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} |\tilde{X}(e^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta &= \int_0^{\pi} \tilde{X}(e^{i\theta})\overline{\tilde{X}(e^{i\theta})}\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \tilde{X}(e^{i\theta})\tilde{X}(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} x_j x_k \int_0^{\pi} e^{i(j-k)\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} x_j^2 \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta + \sum_{j\neq k} x_j x_k \int_0^{\pi} e^{i(j-k)\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \pi \|X\|^2 + \sum_{0\leqslant j<k\leqslant n-1} \left(x_j x_k \int_0^{\pi} e^{i(j-k)\theta}\mathrm{d}\theta + x_k x_j \int_0^{\pi} e^{-i(j-k)\theta}\mathrm{d}\theta \right) \\
&= \pi \|X\|^2 + \sum_{0\leqslant j<k\leqslant n-1} x_j x_k \int_0^{\pi} 2\cos((j-k)\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \pi \|X\|^2 + \sum_{0\leqslant j<k\leqslant n-1} x_j x_k \left[\frac{\sin((j-k)\theta)}{j-k} \right]_0^{\pi} \\
&= \pi \|X\|^2
\end{aligned}$$

On a donc effectivement ${}^tXH_nX \leqslant \pi \|X\|^2$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.
remarque : ce n'est pas demandé mais puisque $\rho_n = \max_{\|X\|=1} {}^tXH_nX$, on obtient que $\rho_n \leqslant \pi$.

8. On a

$$\rho_{n+1} = \max\{{}^tXH_{n+1}X, X \in M_{n+1,1}(\mathbb{R}), \|X\| = 1\}$$

et une propriété similaire pour ρ_n. Si X est une vecteur propre unitaire pour H_n pour la valeur propre ρ_n, on peut alors considérer le vecteur Y de taille $n+1$ donc les n premières coordonnées sont celles de X et la dernière vaut 0. On a alors $\|Y\| = 1$ et ${}^tYH_{n+1}Y = {}^tXH_nX = \rho_n$. On en déduit que ρ_{n+1}, en tant que maximum, est supérieur à cette valeur ρ_n. La suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante (et majorée par π).

Un opérateur intégral

9. Soit $x \in [0,1[$. La fonction intégrée est continue sur $[0,1[$ et, pour tout $t \in [0,1[$, $\left|K_n(xt)f(t)\right| \leqslant n|f(t)|$ ce qui donne l'intégrabilité sur $[0,1[$. Pour $x \in [0,1[$, on a alors

$$T_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_0^1 t^k f(t)\, dt \right) x^k$$

La fonction $T_n(f)$ est donc polynomiale sur $[0,1[$ donc dans E. Si T_n était injectif, alors on aurait une application injective entre E de dimension infinie (E contient au moins toutes les fonctions polynomiales) et l'espace des fonctions polynomiales de degré au plus $n-1$ de dimension finie.
On peut également constater que cela revient à trouver une fonction vérifiant $\int_0^1 t^k f(t)\, dt = 0$ pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$. En considérant le produit scalaire $(P,Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}[X]$, on cherche un polynôme orthogonal aux polynômes de degré au plus $n-1$. Cela peut s'obtenir en orthonormalisant la famille $(1, X, \ldots, X^n)$ pour ce produit scalaire - le dernier polynôme est alors orthogonal aux précédents.

10. Pour tout $x \in [0,1[$,

$$T_n(\tilde{X})(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_0^1 t^k \tilde{X}(t)\, dt \right) x^k = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 x_j t^{j+k} x^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^k x_j}{j+k+1}$$

ce qui donne $T_n(\tilde{X})(x) = {}^tZ(x)H_nX = {}^tXH_nZ(x)$ avec $Z(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \ldots \\ x^{n-1} \end{pmatrix}$.

Si $T_n(f) = \lambda f$ et $\lambda \neq 0$ alors $f = \frac{1}{\lambda} T_n(f)$ est polynomiale de degré au plus $n-1$. On peut donc chercher f sous la forme $\tilde{X}$. On a alors

$$T_n(\tilde{X}) = \lambda \tilde{X} \Leftrightarrow \forall x \in [0,1[, {}^tZ(x)H_nX = \lambda \tilde{X}(x)$$

Or $\tilde{X}(x) = {}^tZ(x)X$, ce qui donne alors la relation

$$\forall x \in [0,1[, {}^tZ(x)\left(H_nX - \lambda X\right) = 0$$

et donc c'est équivalent à avoir un vecteur $H_nX - \lambda X = 0$. En effet, si on note $A = H_nX - \lambda X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$, alors ${}^tZ(x)A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$. La fonction polynomiale est nulle sur $[0,1[$ si et seulement si ses coefficients sont nuls.
Finalement $\tilde{X}$ est une fonction propre pour la valeur propre $\lambda \neq 0$ de T_n si et seulement si X est vecteur propre pour H_n pour la valeur propre λ.

11. On considère donc un vecteur propre X pour ρ_n. La fonction $\varphi = \tilde{X}$ est alors fonction propre pour T_n, c'est-à-dire, pour tout $x \in [0,1[$, $\int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t = \rho_n \varphi(x)$. D'après la première partie, on peut choisir X à coordonnées toutes strictement positives. Ainsi la fonction $\tilde{X}$ associée est continue, strictement positive sur $[0,1]$ et $\tilde{X} \in \mathscr{A}$. Pour cette fonction, on a bien

$$\rho_n = \sup_{x\in]0,1[} \frac{1}{\tilde{X}(x)} \int_0^1 K_n(tx)\tilde{X}(t)\mathrm{d}t.$$

Soit $\varphi \in \mathscr{A}$ et X toujours comme au dessus, c'est-à-dire $T_n(\tilde{X}) = \rho_n \tilde{X}$. Pour tout $x \in]0,1[$, on a (tout ce qui apparaît est positif)

$$\begin{array}{rrcl}
& \displaystyle\int_0^1 K_n(tx)\tilde{X}(t)\mathrm{d}t &=& \rho_n \tilde{X}(x) \\
\Leftrightarrow & \displaystyle\int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\frac{\tilde{X}(t)}{\varphi(t)}\mathrm{d}t &=& \rho_n \tilde{X}(x) \\
\Leftrightarrow & \displaystyle\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\frac{\tilde{X}(t)}{\varphi(t)}\mathrm{d}t &=& \rho_n \dfrac{\tilde{X}(x)}{\varphi(x)} \\
\Rightarrow & \rho_n \dfrac{\tilde{X}(x)}{\varphi(x)} &\leqslant& \displaystyle\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t \left\|\frac{\tilde{X}}{\varphi}\right\|_{\infty,]0,1[} \\
\Rightarrow & \rho_n \dfrac{\tilde{X}(x)}{\varphi(x)} &\leqslant& \displaystyle\sup_{x\in]0,1[}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t\right) \left\|\frac{\tilde{X}}{\varphi}\right\|_{\infty,]0,1[}
\end{array}$$

ceci étant vrai pour tout $x \in]0,1[$, on obtient

$$\rho_n \left\|\frac{\tilde{X}}{\varphi}\right\|_{\infty,]0,1[} \leqslant \sup_{x\in]0,1[}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t\right) \left\|\frac{\tilde{X}}{\varphi}\right\|_{\infty,]0,1[}$$

et ainsi

$$\forall \varphi \in \mathscr{A}, \rho_n \leqslant \sup_{x\in]0,1[}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t\right)$$

Enfin on a

$$\rho_n \leqslant \inf_{\varphi\in\mathscr{A}} \sup_{x\in]0,1[}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t\right)$$

avec égalité pour la fonction $\tilde{X}$.

Une majoration explicite des rayons spectraux

12. Soit $h(x,t) = \dfrac{t^n\varphi(t)}{1-xt}$.

- pour $x \in]0,1[$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[0,1[$ et majorée par $\dfrac{\varphi(t)}{1-x}$ donc intégrable sur $[0,1[$.
- pour $t \in [0,1[$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$ avec $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t^{n+1}\varphi(t)}{(1-xt)^2}$, continue par rapport à t sur $]0,1[$ (pour $x \in]0,1[$ fixé),
- Soit $a \in]0,1[$. Pour $x \in]0,a]$ et $t \in]0,1[$, on a $\left|\dfrac{t^{n+1}\varphi(t)}{(1-xt)^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{(1-a)^2}\varphi(t)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{(1-a)^2}\varphi(t)$ est intégrable sur $]0,1[$.

on en déduit que J_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout $]0,a]$ avec $a \in]0,1[$ donc sur $]0,1[$ et $J_n'(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}\varphi(t)}{(1-xt)^2}\mathrm{d}t$. De plus

$$\begin{aligned}
xJ_n'(x) &= \int_0^1 \frac{xt.t^n\varphi(t)}{(1-xt)^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(xt-1+1)t^n\varphi(t)}{(1-xt)^2}\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{1-xt}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-xt)^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-xt)^2}\mathrm{d}t - J_n(x)
\end{aligned}$$

13. On commence par le cas $n = 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1-t}{1-xt}\varphi'(t)\mathrm{d}t &= \left[\frac{1-t}{1-xt}\varphi(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{xt-1+x(1-t)}{(1-xt)^2}\varphi(t)\mathrm{d}t \\
&= -\varphi(0) - (x-1)\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{(1-xt)^2}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

ce qui donne la relation au rang 0 avec $c = \varphi(0)$:

$$0 = \varphi(0) + (x-1)\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{(1-xt)^2}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{1-t}{1-xt}\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

On refait pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{t^n(1-t)}{1-xt}\varphi'(t)\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^n(1-t)}{1-xt}\varphi(t)\right]_0^1 \\
&\quad - \int_0^1 \frac{(nt^{n-1}-(n+1)t^n)(1-xt)+x(t^n-t^{n+1})}{(1-xt)^2}\varphi(t)\mathrm{d}t \\
&= n\int_0^1 \frac{(t^n-t^{n-1})}{1-xt}\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-xt)-x(t^n-t^{n+1})}{(1-xt)^2}\varphi(t)\mathrm{d}t \\
&= n(J_n(x)-J_{n-1}(x)) + \int_0^1 \frac{t^n(1-x)}{(1-xt)^2}\varphi(t)\mathrm{d}t \\
&= n(J_n(x)-J_{n-1}(x)) + (1-x)\int_0^1 \frac{t^n}{(1-xt)^2}\varphi(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

on obtient donc

$$nJ_n(x) = nJ_{n-1}(x) + (x-1)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-xt)^2}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-xt}\mathrm{d}t$$

ce qui donne le résultat avec $c = 0$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

14. On a donc

$$\begin{aligned} x(1-x)J_n'(x) &= (1-x)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-xt)^2}\mathrm{d}t + (x-1)J_n(x) \\ &= -nJ_n(x) + c + nJ_{n-1}(x) + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-xt}\mathrm{d}t + (x-1)J_n(x) \end{aligned}$$

Puisque

$$J_{n-1}(x) = \int_0^1 \frac{t^{n-1}(1-xt+xt)\varphi(t)}{1-xt}\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\mathrm{d}t + xJ_n(x),$$

on obtient

$$x(1-x)J_n'(x) = (x-1-n+nx)J_n(x) + c + n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-xt}\mathrm{d}t$$

et ainsi

$$x(1-x)J_n'(x) = (n+1)(x-1)J_n(x) + c + n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-xt}\mathrm{d}t$$

15. On résout cette équation sur $[0,1[$ puisque $1-t$ ne s'y annule pas. On obtient $y(t) = C.\exp(\gamma\ln|1-t|) = C(1-t)^\gamma$. La fonction y est strictement positive sur $]0,1[$ si et seulement si $C>0$. La fonction $1/y$ admet un prolongement continue sur $[0,1]$ si et seulement si $-\gamma \geqslant 0$ soit $\gamma \leqslant 0$. Enfin, on a $(1-t)\varphi(t)$ de limite nulle en 1 si et seulement si $1+\gamma>0$. Finalement les conditions sont $\boxed{C>0 \text{ et } -1<\gamma\leqslant 0}$ si $y(t) = C(1-t)^\gamma$.

16. On prend donc $\varphi(t) = (1-t)^\gamma$ avec $\gamma \in]-1,0]$. Les fonctions qui apparaissent sont dérivables sur $]0,1[$ donc

$$\begin{aligned} \Phi_n'(x) &= \left(nx^{n-1}J_n(x) + x^nJ_n'(x)\right)(1-x)^{-\gamma} + \gamma(1-x)^{-\gamma-1}x^nJ_n(x) \\ &= n\frac{\Phi_n(x)}{x} + x^{n-1}.x(1-x)J_n'(x)(1-x)^{-1-\gamma} + \gamma\frac{\Phi_n(x)}{1-x} \\ &= \left(\frac{n}{x} + \frac{\gamma}{1-x}\right)\Phi_n(x) \\ &\quad + \frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}\left(c + (n+1)(x-1)J_n(x) + n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-xt}\mathrm{d}t\right) \end{aligned}$$

on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-xt}\mathrm{d}t = -\gamma\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{1-xt}\mathrm{d}t$, si bien que

$$\begin{aligned} \Phi_n'(x) &= \left(\frac{n}{x} + \frac{\gamma}{1-x} - \frac{n+1}{x} - \gamma\frac{1}{x(1-x)}\right)\Phi_n(x) + \frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}\left(c + n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\mathrm{d}t\right) \\ &= \left(-\frac{1}{x} + \gamma\frac{x-1}{x(1-x)}\right)\Phi_n(x) + \frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}\left(c + n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\mathrm{d}t\right) \end{aligned}$$

Il reste alors

$$\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^\gamma\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(n)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n+1+\gamma)}$$

Tout cela donne

$$\Phi_n'(x) = -(\gamma+1)\frac{\Phi_n(x)}{x} + n\frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}c_n$$

où $c_n = c + n\dfrac{\Gamma(n)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n+1+\gamma)}$ (et $c = \varphi(0)$ si $n=0$ et $c=0$ sinon). On peut simplifier la constante :

$$\Gamma(n+1+\gamma) = (n+\gamma)(n-1+\gamma)\dots(1+\gamma)\Gamma(1+\gamma),$$

si bien que

$$c_n = c + \frac{n\Gamma(n)}{(n+\gamma)(n-1+\gamma)\dots(1+\gamma)} = c + \frac{n!}{(n+\gamma)(n-1+\gamma)\dots(1+\gamma)}.$$

On a notamment $c_0 = c = \varphi(0) = 1$ et, pour $n\geqslant 1$, $c_n = \dfrac{n!}{(n+\gamma)(n-1+\gamma)\dots(1+\gamma)}$.

17. On résout l'équation différentielle obtenue sur $]0,1[$:

- les solutions de l'équation homogène sont $x\mapsto \dfrac{A}{x^{\gamma+1}}$,
- une solution particulière s'obtient par exemple par méthode de variation de la constante. On le cherche sous la forme $A(x)f_0(x)$ avec $f_0(x) = \dfrac{1}{x^{\gamma+1}}$ et on a l'équation $A'(x)f_0(x) = c_n\dfrac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}$,

$$A'(x) = c_n\frac{x^{n+\gamma}}{(1-x)^{1+\gamma}}$$

puisque $n+\gamma>-1$, la fonction $t\mapsto \dfrac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}$ est intégrable sur $]0,1/2[$ et une primitive de cette fonction admet une limite finie en 0, ce qui permet de prendre la primitive qui s'annule en 0 pour avoir

$$A(x) = c_n\int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\mathrm{d}t.$$

et finalement

$$\Phi_n(x) = \frac{A}{x^{\gamma+1}} + \frac{c_n}{x^{\gamma+1}}\int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\mathrm{d}t.$$

Puisque Φ_n admet une imite finie en 0, on a $A=0$ et

$$\boxed{\forall x\in]0,1[, \Phi_n(x) = \frac{c_n}{x^{\gamma+1}}\int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\mathrm{d}t}$$

18. On calcule $r_n(x)$ avec l'une des fonctions $\varphi : t \mapsto (1-t)^\gamma$ (et $\gamma \in]-1,0[$) et $K_n(tx) = \dfrac{1-(xt)^n}{1-xt}$,

$$r_n(x) = \frac{1}{\varphi(x)}\left(\int_0^1 \frac{1-x^nt^n}{1-xt}\varphi(t)\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{\varphi(x)}\left(J_0(x) - x^nJ_n(x)\right) = \Phi_0(x) - \Phi_n(x).$$

On note alors $\alpha = -\gamma$ en prenant $\gamma \in]-1,0[$. Cela donne

$$\begin{aligned}\Phi_0(x) - \Phi_n(x) &= \frac{c_0}{x^{1-\alpha}}\int_0^x \frac{t^{-\alpha}}{(1-t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t - \frac{c_n}{x^{1-\alpha}}\int_0^x \frac{t^{n-\alpha}}{(1-t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{x^{1-\alpha}}\int_0^x \frac{1}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}(1-c_nt^n)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On écrit c_n avec α :

$$c_n = \frac{n!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)} = \theta_n$$

Puisque les fonctions φ utilisées sont dans $\mathscr{A}$, on a

$$\inf_{\varphi\in\mathscr{A}}\sup_{x\in]0,1[}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \inf_{\alpha\in]0,1[}\sup_{x\in]0,1[}\left(\frac{1}{x^{1-\alpha}}\int_0^x \frac{1-\theta_nt^n}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t\right)$$

cela donne l'inégalité pour ρ_n.

19. On effectue les calculs avec $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\theta_n = \frac{n!}{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\dots\frac{(2n-1)}{2}} = \frac{2^nn!}{1.3.\dots(2n-1)} = \frac{(2^nn!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}.$$

on a alors

$$\rho_n \leqslant \theta_n^{1/(2n)}\int_0^{\theta_n^{-1/n}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t-t^2}}$$

avec $\theta_n^{1/(2n)} = \omega_n$, cela donne

$$\rho_n \leqslant \omega_n\int_0^{1/\omega_n^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\frac{1}{4}-(t-\frac{1}{2})^2}} = 2\omega_n\int_0^{1/\omega_n^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-(2t-1)^2}} = \omega_n\left[\arcsin(2t-1)\right]_0^{1/\omega_n^2}.$$

Plus qu'à simplifier $\arcsin(2t-1)$ en espérant faire apparaître $\arcsin\sqrt{t}$. Le plus simple est de dériver ces fonctions. Si $g(t) = \arcsin\sqrt{t}$ alors $g'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} = \dfrac{1}{2\sqrt{t(1-t)}}$.

On se rend compte qu'il vaut mieux prendre cette primitive dans le calcul, ce qui donne

$$\int_0^{1/\omega_n^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t-t^2}} = \left[2\arcsin\sqrt{t}\right]_0^{1/\omega_n^2} = 2\arcsin\frac{1}{\omega_n}.$$

Finalement, on a $\boxed{\rho_n \leqslant 2\omega_n\arcsin\frac{1}{\omega_n}}$.

20.

$$\omega_n = 2\exp\left(\frac{1}{2n}\ln\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right) = \exp\left(\ln 2 + \frac{1}{2n}\ln\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right) = \exp\left(\frac{1}{2n}\left(\ln 4^n + \ln\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)\right)$$

d'où $\omega_n = \exp\left(\frac{1}{2n}\ln\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\right)$ avec

$$4^n\frac{(n!)^2}{(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} 4^n\frac{(2\pi n)n^{2n}e^{-2n}}{\sqrt{4\pi n}((2n)^{2n}e^{-2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n\pi}$$

Le terme dans l'exponentielle tend vers 0, d'où

$$\omega_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}\left(\ln\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}\ln(\sqrt{n\pi}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{4n}$$

On a donc $\omega_n = 1 + \frac{\ln n}{4n} + o\left(\frac{\ln n}{4n}\right)$ et $\frac{1}{\omega_n} = 1 - \frac{\ln n}{4n} + o\left(\frac{\ln n}{4n}\right)$. On a également $\arcsin\frac{1}{\omega_n} = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{1}{\omega_n}$. En utilisant de plus $\arccos 1-u \underset{u\to 0}{\sim} \sqrt{2u}$, on peut effectuer un développement limité et obtenir (calculs à revoir quand même)

$$2\omega_n\arcsin\frac{1}{\omega_n} = \pi - \sqrt{\frac{\ln n}{n}} + o\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)$$

ce qui donne un équivalent de $\pi - 2\omega_n\arcsin\frac{1}{\omega_n}$.