Étude préliminaire

I.A - Convergence des séries de Riemann

I.A.1 Pour tout $x \in [k, k+1]$, on a $f(x) \leqslant f(k)$. On en déduit que

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,dx = (k+1-k)f(k).$$

De même, si $k \geqslant a+1$ alors $k-1 \geqslant a$ et, pour tout $x \in [k-1, k]$, $f(k) \leqslant f(x)$. Cela donne l'autre inégalité.

I.A.2 Si $\alpha \leqslant 0$, la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ne tend pas vers 0 et la série associée diverge. Si $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est continue, décroissante sur $[1, +\infty[$.

- si $\alpha > 1$. On a, pour $n \geqslant 2$, $A_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^n \leqslant \frac{1}{\alpha-1}$. La suite (A_n) est croissante majorée donc convergente. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
- si $\alpha < 1$, on a, pour $n \geqslant 2$,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \int_2^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_2^{n+1} = \frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{\alpha-1} - 2^{\alpha-1}\right)$$

  de limite $+\infty$. La série diverge.
- si $\alpha = 1$: comme le cas précédent en changeant la primitive par un logarithme.

I.A.3 On a directement, puisque les termes de la somme sont tous positifs, $S(\alpha) \geqslant 1$. On reprend les inégalités précédentes. Cela donne

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}.$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $S(\alpha) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}$.

I.B - Première étude asymptotique du reste

I.B.1 On reprend les mêmes encadrements. On obtient $\int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \leqslant R_n(\alpha) \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$. Cela donne $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leqslant R_n(\alpha) \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}$. On a alors

$$0 \leqslant R_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right).$$

Or $\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}\frac{1}{n^{\alpha-1}} = \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left((1-\frac{1}{n})^{\alpha-1} - 1\right) \sim \frac{1}{n^\alpha}$. Cela donne le résultat.

On peut aussi repartir de $\int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \leqslant R_n(\alpha) \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ qui donne

$$0 \leqslant R_n(\alpha) - \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{(n-1)^\alpha},$$

ce qui donne à nouveau le résultat (avec $\int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$).

I.B.2 On écrit la formule de Taylor entre les points $b = k+1$ et $a = k$. Cela donne

$$f(k+1) = f(k) + f'(k) + f''(k) + \int_k^{k+1} \frac{1}{2}(k+1-t)^2 f^{(3)}(t)\,dt$$

avec $f'(t) = \frac{1}{t^\alpha}$, $f''(t) = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$ et $f^{(3)}(t) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}}$. On obtient alors

$$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$$

où $A_k = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\int_k^{k+1}(k+1-t)^2.\frac{1}{t^{\alpha+2}}\,dt$. Ce terme est positif et pour tout $t \in [k, k+1]$, $(k+1-t)^2.\frac{1}{t^{\alpha+2}} \leqslant \frac{1}{k^{\alpha+2}}$. On obtient alors $0 \leqslant A_k \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$.

I.B.3 On somme la relation précédente pour k allant de n à l'infini. On obtient (outes les séries convergent car $\alpha, \alpha+1, \alpha+2$ sont strictement supérieurs à 1) :

$$-f(n) = R_n(\alpha) - \frac{\alpha}{2}R_n(\alpha+1) + \sum_{k=n}^{+\infty} A_k$$

On a $\alpha R_n(\alpha+1) = \frac{1}{n^\alpha} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ et

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} A_k \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}R_n(\alpha+2) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

de nouveau avec la question précédente. Tout cela donne

$$R_n(\alpha) = -f(n) + \frac{1}{2n^\alpha} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\frac{1}{2n^\alpha} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).$$

Formule de Taylor et nombres de Bernoulli

II.A - Nombres de Bernoulli

II.A.1 On pose $g = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{p-1} f^{(p-1)} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i f^{(i)}$ (les coefficients sont pour le moment quelconques). On a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} \frac{g^{(j)}}{j!} &= \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j!}\left(\sum_{i=0}^{p-1} a_i f^{(i+j)}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j!}\left(\sum_{k=j}^{j+p-1} a_{k-j} f^{(k)}\right) = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j!}\left(\sum_{k=j}^{p} a_{k-j} f^{(k)} + \sum_{k=p+1}^{j+p-1} a_{k-j} f^{(k)}\right) \\
&= \sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant p} \frac{1}{j!} a_{k-j} f^{(k)} + \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=p+1}^{j+p-1} \frac{1}{j!} a_{k-j} f^{(k)} \\
&= \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{a_{k-j}}{j!}\right) f^{(k)} + \sum_{k=p+1}^{2p-1} \alpha_{k,p} f^{(k)}
\end{aligned}$$

Pour obtenir l'expression souhaitée, il faut et il suffit que $a_0 = 1$ et pour tout $k \in [\![2;p]\!]$, $\sum_{j=1}^{k} \frac{a_{k-j}}{j!} = 0$. Cela donne, de manière équivalente $a_0 = 1$ ainsi que, pour $k \in [\![2;p-1]\!]$, $a_{k-1} = -\sum_{j=2}^{k} \frac{a_{k-j}}{j!}$ ou encore, pour tout $k \in [\![1;p-1]\!]$

$$a_k = -\sum_{j=2}^{k+1} \frac{a_{k+1-j}}{j!} = -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_i}{(k+1-i)!}$$

Ces relations définissent une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = -\sum_{j=2}^{n+1} \frac{a_{n+1-j}}{j!}$ (la relation de fait intervenir que des termes d'indices moins élevés).

II.A.2 On a obtenu les relations demandées. On obtient $a_1 = -\frac{1}{2}$ et $a_2 = \frac{1}{12}$. On montre l'inégalité par récurrence. Si elle est vraie jusqu'au rang $n-1$, alors

$$|a_n| \leqslant \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j!} \leqslant \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{j!} = e - 2 < 1.$$

II.A.3 a) Si $|z| < 1$, alors $|a_p z^p| \leqslant |z|^p$ et $\sum |z|^p$ converge. La série $\sum a_p z^p$ est absolument convergente si $|z| < 1$.

b) On effectue le produit de Cauchy entre les sommes des deux séries absolument convergentes :

$$(\mathrm{e}^z - 1)\varphi(z) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p\right)$$

On note $u_k = \frac{z^k}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $u_0 = 0$. On a alors, pour $|z| < 1$, $(\mathrm{e}^z - 1)\varphi(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} w_p$ où

$$w_p = \sum_{k=0}^{p} u_k a_{p-k} z^{p-k} = \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{a_{p-k}}{k!}\right) z^p$$

avec $w_0 = 0$. D'après la définition de la suite (a_n), on a, pour $p \geqslant 2$, $\sum_{j=1}^{p} \frac{a_{p-j}}{j!} = 0$. Il ne reste que $w_1 = u_1 = z$. Finalement, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, on a $(e^z - 1)\varphi(z) = z$. Cela donne, pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $|z| < 1$, $\varphi(z) = \frac{z}{e^z - 1}$.

c) Pour $x \in \mathbb{R}^*$ avec $|x| < 1$, on a

$$g(x) = \varphi(x) + \frac{x}{2} = x\left(\frac{1}{e^x - 1} + \frac{1}{2}\right) = \frac{x}{2}\frac{2 + e^x - 1}{e^x - 1} = \frac{x}{2}\frac{e^x + 1}{e^x - 1}.$$

On a alors $g(-x) = -\frac{x}{2}\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1} = -\frac{x}{2}\frac{e^{-x}}{e^{-x}}\frac{1+e^x}{1-e^x} = g(x)$. La fonction g est donc paire. Puisque g est développable en série entière sur $]-1,1[$, tous ses coefficients d'indice impaire sont nuls. Puisque $g(x) = \varphi(x) + \frac{x}{2} = \sum_{p=2}^{+\infty} a_p z^p$ (puisque $a_1 = -\frac{1}{2}$), on a $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On détermine alors a_4 avec la relation de récurrence (et $a_3 = 0$). Cela donne $a_4 = -\frac{1}{720}$.

II.B - Formule de Taylor

II.B.1 On a

$$g(k+1) = \sum_{i=0}^{2p} \frac{(k+1-k)^i}{i!} g^{(i)}(k) + \frac{1}{(2p)!}\int_k^{k+1} (k+1-t)^{2p} g^{(2p+1)}(t)\,dt.$$

ce qui donne

$$g(k+1) - g(k) = \sum_{i=1}^{2p} \frac{g^{(i)}}{i!}(k) + \frac{1}{(2p)!}\int_k^{k+1} (k+1-t)^{2p} g^{(2p+1)}(t)\,dt.$$

ou encore

$$g(k+1) - g(k) = f'(k) + \sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,2p} f^{(2p+l)}(k) + \frac{1}{(2p)!}\int_k^{k+1} (k+1-t)^{2p} g^{(2p+1)}(t)\,dt.$$

On obtient une expression pour $R(k)$ (un peu lourde). On a $f(x) = \frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}$, $f'(x) = x^{-\alpha}$, $f''(x) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$ et (par récurrence), $f^{(j)}(x) = (-1)^{j-1}(\alpha)(\alpha+1)\dots(\alpha+j-2)\frac{1}{x^{\alpha+j-1}}$.

On s'interesse à la première somme : $\sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,2p} f^{(2p+l)}(k)$. Le nombre de termes est fixé et $2p+l \geqslant 2p+1$. Puisque $k \geqslant 1$, on a $f^{(2p+l)}(k) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^{2p+l-1+\alpha}}\right)$ qui est aussi un $\mathrm{O}\left(\frac{1}{k^{2p+\alpha}}\right)$. Par somme finie, cette première somme est un terme en $\mathrm{O}\left(\frac{1}{k^{2p+\alpha}}\right)$.

On étudie l'intégrale $\int_k^{k+1}(k+1-t)^{2p}g^{(2p+1)}(t)\,dt$. La fonction $g^{(2p+1)}$ est une combinaison linéaire (finie) de termes $f^{(i)}$ pour $i \geqslant 2p+1$. Par inégalité triangulaire, on majore l'intégrale par une combinaison de termes $\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^{\alpha+i-1}}$ et ces termes se majorent (en valeur absolue) par $\frac{1}{k^{\alpha+i-1}}$ avec $\alpha+i-1 \geqslant \alpha+2p$. On a de nouveau une combinaison de termes en $\mathrm{O}\left(\frac{1}{k^{2p+\alpha}}\right)$.

Finalement $|R(k)| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^{2p+\alpha}}\right)$, la suite $k^{2p+\alpha}R(k)$ est majorée à partir d'un certain rang donc majorée. Il existe $A > 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|R(k)| \leqslant Ak^{-(2p+\alpha)}$.

II.B.2 On reprend le même principe qu'une question précédente. On somme la relation $f'(k) = \frac{1}{k^a lpha} = g(k+1) - g(k) - R(k)$ pour k allant de n à l'infini. C'est possible puisque $\alpha > 1$ donc la suite $g(k)$ tend vers 0 et la série $\sum R(k)$ converge d'après la majoration précédente. On obtient

$$R_n(\alpha) = -g(n) - \sum_{k=n}^{+\infty} R(k)$$

On a

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} R(k)\right| \leqslant A\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^{2p+\alpha}} = AR_n(2p+\alpha) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right).$$

Enfin $g(n) = \sum_{k=0}^{2p-1} a_k f^{(k)}(n)$. Puisque $p \geqslant 2$, on a $2p-1 \geqslant 3$ et le terme a_{2p-1} est nul. On a donc

$$R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} = -\left(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \dots + a_{2p-2}f^{(2p-2)}(n)\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$$

II.B.3 Pour $\alpha = 3$ et $p = 3$, on obtient

$$R_n(3) = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^3} = -\left(\frac{1}{-2n^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^3} + \frac{1}{12}\frac{-3}{n^4} - \frac{1}{720}\frac{-3.4.5}{n^6}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^8}\right)$$

soit $R_n(3) = \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{12n^6} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^8}\right)$.

Polynômes de Bernoulli et formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

III.A - Polynômes de Bernoulli

III.A.1 Propriétés élémentaires.

a) On montre par récurrence $\mathscr{P}(n)$: « A_n existe et est unique et A_n est polynomial de degré n ». C'est le cas pour A_0. Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel la propriété est vraie. Alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A_{n+1}(x) = C + \int_0^x A_n(t)\,dt$. La dernière condition donne $\int_0^1 A_{n+1}(t)\,dt = 0 = C + \int_0^1\left(\int_0^x A_n(t)\,dt\right)dx$. Cela définit C de façon unique et $A_{n+1}(x) = \int_0^x A_n(t)\,dt - \int_0^1\left(\int_0^x A_n(t)\,dt\right)dx$. On trouve également que A_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$. Par récurrence, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. On trouve $A_0 = 1$, $A_1 = X - \frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}$ et $A_3 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X$.

b) On pose $B_n(t) = (-1)^n A_n(1-t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$. On vérifie que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les mêmes propriétés que celle de A_n. par unicité, on a $A_n = B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Pour $n \geqslant 2$, $A_n(1) - A_n(0) = \int_0^1 A_n'(t)\,dt = \int_0^1 A_{n-1}(t)\,dt = 0$. On a donc $A_n(1) = A_n(0)$ si $n \geqslant 2$. On a également $A_{2n-1}(1) = (-1)^{2n-1}A_n(1-1) = -A_{2n-1}(0)$. On a donc $A_{2n-1}(0) = 0$ si $n \geqslant 2$.

d) On a $A_n(X) = \sum_{k=0}^n A_n^{(k)}(0)\frac{X^k}{k!}$. Or $A_n^{(k)} = A_{n-k}$ et $A_n^{(k)}(0) = c_{n-k}$. On a donc $A_n = \sum_{k=0}^n c_{n-k}\frac{X^k}{k!} = \sum_{k=0}^n c_k X^{n-k}(n-k)!$. La relation $A_{n+1}(1) - A_{n+1}(0) = 0$, pour $n \geqslant 1$, donne alors $\sum_{k=0}^n \frac{c_k}{(n+1-k)!} = 0$.

e) On a bien $c_0 = 1$ et $c_p = -\sum_{j=0}^{n-1}\frac{c_j}{(n+1-j)!} = -\sum_{j=2}^{n+1}\frac{c_{n+1-j}}{j!}$. Ce sont les relations qui définissent l'unique suite (a_n) d'où l'égalité entre les deux suites.

III.A.2 Fonction génératrice.

a) Pour $t \in [-1,1]$, puisque $|a| \leqslant 1$, on a $|A_n(t)| \leqslant \sum_{k=0}^n \frac{|a_{n-k}|}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leqslant e$. On a alors $|A_n(t)z^n| \leqslant e|z|^n$ et la série converge absolument si $|z| < 1$.

b) On note $f_n(t) = A_n(t)z^n$. La fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et $f_n'(t) = A_n'(t)z^n = A_{n-1}(t)z^n$ si $n \geqslant 1$ (et $f_0'(t) = 0$). La série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$ (car $|f_n(t)| \leqslant e|z|^n$) et $|f_n'(t)| \leqslant e|z|^n$ donc $\sum f_n'$ converge normalement sur $[0,1]$. On peut donc dériver terme à terme. Si on note $h : t \mapsto f(t,z)$ pour z fixé, on a, pour tout $t \in [0,1]$, $h'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_{n-1}(t)z^n = zh(t)$

On en déduit (équation différentielle) que, pour tout $t \in [0,1]$, $h(t) = h(0)e^{tz}$. Or $h(0) = f(0,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \varphi(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$. Finalement, pour tout $t \in [0,1]$ et $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z| < 1$, on a $f(t,z) = \dfrac{ze^{tz}}{e^z - 1}$.

c) On calcule :

$$\frac{z\mathrm{e}^{z/2}}{\mathrm{e}^z - 1} + \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} = z\frac{e^{z/2}+1}{(e^{z/2}+1)(e^{z/2}-1)} = z\frac{1}{\mathrm{e}^{z/2}-1} = 2\frac{z/2}{\mathrm{e}^{z/2}-1}.$$

On a

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{2},z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(\frac{1}{2})z^n &= \frac{ze^{z/2}}{e^z-1} = 2\varphi(z/2) - \varphi(z)) \\ &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z/2)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{2^{n-1}} - 1)a_n z^n. \end{aligned}$$

Ces calculs sont valables notamment pour $|z| < 1$ et $z \neq 0$. L'égalité est vraie en 0 également. On a donc pour $|z| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(\frac{1}{2})z^n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{2^{n-1}} - 1)a_n z^n$. Par unicité de développement en série entière, $A_n(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2^{n-1}} - 1)a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La formule est vraie pour $n = 0$.

III.A.3 Variations des polynômes de Bernoulli.

a) Quelques idées pour la démonstration (je vous laisse la rédaction) :

- On le fait pas récurrence en regroupant 4 par 4. Puisqu'on commence à $n = 2$, on fait un paquet avec $A_{4k+2}, A_{4k+3}, A_{4k+4}$ et A_{4k+5}.
- On utilise les propriétés déjà prouvées : évidemment $A_n' = A_{n-1}$ pour les variations, $A_n(0) = A_n(1)$ et $A_n(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2^{n-1}} - 1)a_n$ qui donne notamment le fait que $A_n(1/2)$ et $A_n(0)$ sont de signe opposé. on a aussi $A_n(0) = A_n(1) = A_n(1/2) = 0$ lorsque n est impair.
- la symétrie $A_n(1-x) = (-1)^n A_n(x)$: si n est pair le graphe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$, si n est impair, le graphe est symétrique par rapport au point $(\frac{1}{2}, 0)$
- Pour les cas pairs, la fonction n'est pas identiquement nulle, on obtient facilement les variations avec la relation $A_n' = A_{n-1}$ et on traverse strictement 0 (sinon $A_n(0)$ et $A_n(1/2)$ sont de signe contraire, donc seraient nuls et A_n serait identiquement nulle).

b)
- pour $n = 2k$ pair, les variations nous donnent le fait que le maximum de $|A_n|$ est en 0 ou en 1/2 mais $|A_n(1/2)| < a_n$. Finalement, $|A_n|$ est majoré par $|a_n|$
- pour $n = 2k+1$ impair : avec les variations et la symétrie, il existe $x_0 \in]0,1/2[$ tel que $|A_{2k+1}| \leqslant |A_{2k+1}(x_0)|$. Or $A_{2k+1}(x_0) - A_{2k+1}(0) = A_{2k+1}(x_0) = \int_0^{x_0} A_{2k}(t)\,dt$. On a donc $|A_{2k+1}(x_0)| \leqslant |a_{2k}|.x_0 \leqslant \dfrac{|a_{2k}|}{2}$.

III.B - Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

III.B.1 a) par récurrence sur q en intégrant l'intégrale par parties.

b) on écrit la formule précédente jusqu'à $q = 2p+1$, et on utilise $A_1(0) = a_1 = -1/2$ et $A_1(1) = 1/2$, $A_{2k+1}(1) = A_{2k+1}(0) = 0$ si $k \in \mathbb{N}^*$. La formule vient directement.

III.B.2 On applique le résultat précédent à la fonction $f_k : x \mapsto f(k+x)$. Elle est toujours de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$. On obtient les relations

$$\begin{aligned} f(k+1) - f(k) &= \frac{1}{2}\left(f'(k) + f'(k+1)\right) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\left(f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)\right) \\ &\quad - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(k+t)\,dt. \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0,1]$, $A_{2p+1}(t) = A^*_{2p+1}(t)$ et ma fonction A^*_{2p+1} est de période 1. On effectue la translation « $u = k+t$ » dans l'intégrale ce qui donne

$$\int_0^1 A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(k+t)\,dt = \int_k^{k+1} A^*_{2p+1}(u-k) f^{(2p+2)}(u)\,du = \int_k^{k+1} A^*_{2p+1}(u) f^{(2p+2)}(u)\,du$$

On peut sommer la relation de départ pour k allant de n à N - en utilisant les télescopages, on obtient

$$\begin{aligned}
f(N+1)-f(n) &= \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{N}\left(f'(k)+f'(k+1)\right)-\sum_{j=1}^{p} a_{2j}\left(f^{(2j)}(N+1)-f^{(2j)}(n)\right)\\
&\quad -\int_n^{N+1} A^*_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)\,dt\\
&= \sum_{k=n}^{N} f'(k)+\frac{1}{2}f'(N+1)-\frac{1}{2}f'(n)-\sum_{j=1}^{p} a_{2j}\left(f^{(2j)}(N+1)-f^{(2j)}(n)\right)\\
&\quad -\int_n^{N+1} A^*_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)\,dt
\end{aligned}$$

Les termes $f(N+1)$, $f'(N+1)$, $f^{(2j)}(N+1)$ tendent vers 0.

L'intégrale tend vers celle de n à l'infini. En effet, on justifie l'intégrabilité de $t\mapsto A^*_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)$ sur $[n,+\infty[$: la fonction est continue sur cet intervalle; on a $\left|A^*_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)\right| \leqslant \frac{|a_{2p}|}{2}\left|f^{(2p+2)}(t)\right|$. Si on note $\varepsilon=\pm 1$ le signe de $f^{(2p+2)}$, on a alors $|f^{(2p+2)}(t)|=\varepsilon f^{(2p+2)}(t)$ et

$$\int_n^X |f^{(2p+2)}(t)|\,dt=\varepsilon\int_n^X f^{(2p+2)}(t)\,dt=\varepsilon\left[f^{(2p+1)}(t)\right]_n^X=\varepsilon\left(f^{(2p+1)}(n)-f^{(2p+1)}(X)\right)$$

de limite finie $\varepsilon f^{(2p+1)}(n)$ lorsque X tend vers $+\infty$. On en déduit l'intégrabilité souhaitée. Cela donne la convergence de la dernière série restante (celle de terme général $f'(k)$) ainsi que

$$-f(n)=\sum_{k=n}^{+\infty} f'(k)-\frac{1}{2}f'(n)+\sum_{j=1}^{p}a_{2j}f^{(2j)}(n)-\int_n^{+\infty}A^*_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)\,dt$$

ce qui se récrit en

$$\sum_{k=n}^{+\infty} f'(k)=-f(n)+\frac{1}{2}f'(n)-\sum_{j=1}^{p}a_{2j}f^{(2j)}(n)+\int_n^{+\infty}A^*_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)\,dt$$

La majoration de l'intégrale a été obtenue précédemment : on avait

$$\int_n^X |f^{(2p+2)}(t)|\,dt=\varepsilon\int_n^X f^{(2p+2)}(t)\,dt=\varepsilon\left[f^{(2p+1)}(t)\right]_n^X=\varepsilon\left(f^{(2p+1)}(n)-f^{(2p+1)}(X)\right)$$

ce qui donne $\displaystyle\int_n^{+\infty}|f^{(2p+2)}(t)|\,dt=\varepsilon f^{(2p+1)}(n)$ et enfin

$$\left|\int_n^{+\infty}A^*_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)\,dt\right|\leqslant\left|\int_n^{+\infty}\frac{a_{2p}}{2}|f^{(2p+2)}(t)|\,dt\right|\leqslant\left|\frac{a_{2p}}{2}\right|\left|f^{(2p+1)}(n)\right|$$

III.B.3 Avec $f(t)=\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$, on a $f'(t)=\frac{1}{x^\alpha}$ et $f^{(k)}(t)=(-1)^{k-1}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-2)}{t^{\alpha+k-1}}$. Les dérivées sont de signe constant sur $[1,+\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$. On peut appliquer le résultat précédent (au rang $p-1$) à cette fonction. Cela donne

$$R_n(\alpha)=-\sum_{k=0}^{2p-2}a_kf^{(k)}(n)+\int_n^{+\infty}A^*_{2p-1}(t)f^{(2p)}(t)\,dt.$$

Compléments sur l'erreur

IV.A - Encadrement de l'erreur

IV.A.1

- si $n\equiv 1 \mod 4$: on a (changement de variable affine « $u=1-t$ »)

$$\int_{1/2}^1 A_n(t)g(t)\,dt=-\int_{1/2}^0 A_n(1-t)g(1-t)\,dt=-\int_0^{1/2}A_n(t)g(1-t)\,dt.$$

  On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 A_n(t)g(t)\,dt=\int_0^{1/2}A_n(t)\left(g(t)-g(1-t)\right)dt$. Si $t\in[0,1/2]$ alors $t\leqslant 1-t$ et $g(t)-g(1-t)\leqslant 0$. On a également $A_n(t)\leqslant 0$. Finalement, pour tout $t\in[0,1/2]$, $A_n(t)\left(g(t)-g(1-t)\right)\geqslant 0$ et l'intégrale est positive.
- si $n\equiv 3 \mod 4$: même principe mais avec $A_n(t)\geqslant 0$.

IV.A.2 On a $S(\alpha)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}^{\alpha}+R_n(\alpha)$ donc

$$\tilde S_{n,2p-2}(\alpha)=S(\alpha)-\left(R_n(\alpha)+\sum_{k=0}^{2p-2}a_kf^{(k)}(n)\right)=S(\alpha)-\int_n^{+\infty}A^*_{2p-1}(t)f^{(2p)}(t)\,dt.$$

On a donc besoin du signe de ce reste intégrale. On effectue la transformation dans l'autre sens :

$$\int_n^{+\infty}A^*_{2p-1}(t)f^{(2p)}(t)\,dt=\sum_{k=n}^{+\infty}\int_k^{k+1}A^*_{2p-1}(t)f^{(2p)}(t)\,dt=\sum_{k=n}^{+\infty}\int_0^1 A_{2p-1}(t)f^{(2p)}(t+k)\,dt$$

En remplaçant p par $2p+1$, on a $\tilde S_{n,4p}(\alpha)=S(\alpha)-\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\int_0^1 A_{4p+1}(t)f^{(4p+2)}(t+k)\,dt$. La dérivée de $g=f^{(4p+2)}$ est $f^{(4p+3)}$ est positive donc g est croissante. On peut appliquer le résultat de la question précédente, l'intégrale est positive et $\tilde S_{n,4p}(\alpha)\leqslant S(\alpha)$. De même avec p remplacé par $2p+3$ (et le signe contraire) - cela donne la majoration. On peut appliquer cette majoration avec $p-1$ au lieu de p.

On a $0 \leqslant S(\alpha) - \tilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leqslant \tilde{S}_{n,4p+2}(\alpha) - \tilde{S}_{n,4p}(\alpha) = -a_{4p+2}f^{(4p+2)}(2n)$ et

$$\left|S(\alpha) - \tilde{S}_{n,4p}(\alpha)\right| \leqslant \left|a_{4p+2}f^{(4p+2)}(n)\right|.$$

On obtient le cas $4p-2$ avec la seconde inégalité de la question précédente.

IV.A.3 On est dans le cas $\alpha = 3$, $p = 2$ et $n = 100$. L'erreur est majorée par $|a_6 f^{(6)}(n)|$. On a $f^{(6)}(t) = -\frac{3.4.5.6.7}{t^8}$ d'où un majorant $\frac{7!/2}{6!.42}.\frac{1}{10^16} = \frac{1}{12.10^{16}} < \frac{1}{10^{17}}$.

IV.B - Séries de Fourier

Pour tout entier naturel $p \geqslant 1$ et tout réel x, on pose $\tilde{A}_p(x) = A_p\left(\frac{x}{2\pi} - \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor\right)$.

IV.B.1 C'est la version « étirée » et périodisée de A_n. Les tableaux de variations de $III.A.3$ nous donne la continuité par morceaux de $\tilde{A}_p$ - et même la continuité sur $\mathbb{R}$ si $p \geqslant 2$.

IV.B.2 Par changement de variable, $\hat{A}_p(n) = \int_0^1 \tilde{A}_p(2\pi x)\mathrm{e}^{-2i\pi nx}\,dx = \int_0^1 A_p(x)e^{-2i\pi nx}\,dx$. On peut appliquer la formule de $III.B.1.a$ avec $f(t) = e^{2in\pi t}$. Pour $p \geqslant 1$, on obtient

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{2}\left(f'(0) + f'(1)\right) + (-1)^p \int_0^1 A_p(t) f^{(p+1)}(t)\,dt$$

car f et ses dérivées sont 2π périodiques (et $A_j(1) = A_j(0)$ si $j \geqslant 2$). Il reste

$$(-1)^p(-2in\pi)^{p+1}\int_0^1 A_p(t)e^{-2in\pi t}\,dt = -\frac{1}{2}(-2i\pi n)(1+1) = 2in\pi$$

Finalement, pour $n \geqslant 1$, $\hat{A}_p(n) = -\frac{1}{(2in\pi)^p}$. On a enfin $\hat{A}_p(0) = \int_0^1 A_p(t)\,dt = 0$ puisque $p \geqslant 1$.

IV.C - Comportement de l'erreur

IV.C.1 Les calculs précédents donnent $f^{2p+2}(t) = \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)}{t^2}f^{(2p)}(t)$. À l'aide du calcul précédent, on obtient

$$\left|\frac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)}\right| = \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)S(2p+2)}{4n^2\pi^2 S(2p)}$$

IV.C.2 D'après la question $I.A.3$, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} S(p) = 1$. On en déduit que

$$\left|\frac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)}\right| \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{p^2}{n^2\pi^2}$$

Notamment $a_{2p}f^{(2p)}(n)$ tend vers $+\infty$ lorsque p tend vers $+\infty$. Fixer n et augmenter p pour calculer $\tilde{S}_{n,2p}(\alpha)$ est donc une mauvaise idée puisque la série de terme général $a_{2p}f^{(2p)}(n)$, qui apparait dans l'expression, est divergente. Pour le calcul, on peut fixer p - on aura alors une convergence en $\mathrm{O}(1/n^{2p+\alpha-1})$. On peut également prendre $p = n$, calculer $\tilde{S}_{n,2n}(\alpha)$ avec une erreur qui aura une décroissance quasi-géométrique de raison proche de $1/\pi^2$... ou encore plein de choix du même genre