Partie I

1. Le calcul direct ne semble pas immédiat. On montre le résultat par récurrence :

- $q=1$: on développe $\sin 3t$ avec $\operatorname{Im}\left(e^{it}\right)^3$, ce qui donne $\sin(3t)=3\sin t-4\sin^3 t$ et ainsi $\dfrac{\sin(3\pi u)}{\sin(\pi u)}=3-4\sin^2(\pi u)=3-2(1-\cos(2\pi u))=1+2\cos(2\pi u)$. Cela donne finalement
$$\int_0^x \frac{\sin(3\pi u)}{\sin(\pi u)}\mathrm{d}u-x=\int_0^x(1+2\cos(2\pi u))\mathrm{d}u-x=2\frac{\sin(2\pi u)}{2\pi}=\frac{\sin(2\pi u)}{\pi}=S_1(x).$$
- si le résultat est valable jusqu'à un certain entier $q-1\geqslant 2$, on a
$$\begin{aligned}&\left(\int_0^x \frac{\sin((2q+1)\pi u)}{\sin(\pi u)}\mathrm{d}u-x\right)-\left(\int_0^x \frac{\sin((2q-1)\pi u)}{\sin(\pi u)}\mathrm{d}u-x\right)\\ &=\int_0^x \frac{\sin((2q+1)\pi u)-\sin((2q-1)\pi u)}{\sin(\pi u)}\mathrm{d}u\\ &=2\int_0^x \frac{\sin(\pi u)\cos(2q\pi u)}{\sin(\pi u)}\mathrm{d}u=\left[\frac{\sin(2q\pi u)}{q\pi}\right]_0^x=\frac{\sin(2q\pi x)}{q\pi}=S_q(x)-S_{q-1}(x)\end{aligned}$$
Avec l'hypothèse de récurrence, on obtient bien $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin((2q+1)\pi u)}{\sin(\pi u)}\mathrm{d}u-x=S_q(x)$.

Remarque : on pourrait poser $S_0(x)=0$, et commencer la récurrence à ce rang... ça simplifie beaucoup le calcul initial qui devient immédiat.

2. a/ on a directement le fait que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,0[\cup]0,1[$. On doit étudier en 0. On a, pour $u\neq 0$,
$$\varphi(u)=\frac{\pi u-\sin(\pi u)}{\pi u\sin(\pi u)}\underset{u\to 0}{\sim}\frac{(\pi u)^3/6}{(\pi u)^2}=\frac{\pi u}{6}$$
et on a bien $\lim\limits_{u\to 0}\varphi(u)=0$ donc φ est continue sur $]-1,1[$ (au passage, même si c'est inutile, on a également $\dfrac{\varphi(u)-\varphi(0)}{u-0}$ qui tend vers $\frac{\pi}{6}$ lorsque 0 tend vers 0, ce qui donne la dérivabilité en 0 et $\varphi'(0)=\frac{\pi}{6}$ - on sait quelle limite on doit trouver pour φ'). On a, pour $u\neq 0$,
$$\varphi'(u)=\frac{1}{\pi u^2}-\frac{\pi\cos(\pi u)}{(\sin^2(\pi u)}=\frac{\sin^2(\pi u)-\pi^2u^2\cos(\pi u)}{\pi u^2\sin^2(\pi u)}$$
On effectue un dl à l'ordre 4 du numérateur (qui est pair en u). Les termes de degré 2 s'annulent et ceux de degré 4 donne $-2(\pi u)^4/6+(\pi^4)u^4/2=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)(\pi u)^4=\frac{1}{6}\pi^4u^4$. Le dénominateur est équivalent à π^3u^4. Finalement, $\lim\limits_{u\to 0}\varphi'(u)=\dfrac{\pi}{6}$. Cela garantit que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$.

b/ Pour $x=0$, le résultat est immédiat. On suppose donc que $x>0$. On utilise les expressions précédentes pour effectuer la différence :
$$\begin{aligned}S_q(x)+x-\frac{1}{\pi}\int_0^{(2q+1)\pi x}\frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v&=\int_0^x \frac{\sin((2q+1)\pi u)}{\sin(\pi u)}\mathrm{d}u-\frac{1}{\pi}\int_0^{(2q+1)\pi x}\frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v\\ &\underset{v=(2q+1)\pi u}{=}\int_0^x \frac{\sin((2q+1)\pi u)}{\sin(\pi u)}-\frac{\sin((2q+1)\pi u)}{\pi u}\mathrm{d}u\\ &=\int_0^x \varphi(u)\sin((2q+1)\pi u)\mathrm{d}u\end{aligned}$$
On se retrouve à démontrer le lemme de Lebesgue avec φ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ puisque $x\in]0,\frac{1}{2}]$. On intègre par parties :
$$\int_0^x \varphi(u)\sin((2q+1)\pi u)\mathrm{d}u=\left[-\frac{1}{(2q+1)\pi}\varphi(u)\cos((2q+1)\pi u)\right]_0^x+\frac{1}{(2q+1)\pi}\int_0^x \varphi'(u)\cos((2q+1)\pi u)\mathrm{d}u.$$
En notant A un majorant de $|\varphi|$ et $|\varphi'|$ sur $[0,1/2]$ (existe car les deux fonctions sont continues sur $[0,1/2]$), on obtient
$$\left|\int_0^x \varphi(u)\sin((2q+1)\pi u)\mathrm{d}u\right|\leqslant\frac{2A}{(2q+1)\pi}+\frac{A/2}{(2q+1)\pi}\leqslant\frac{2A}{2q\pi}+\frac{A}{4q\pi}=\frac{A_1}{q}.$$
avec $A_1=5A/(4\pi)$.

c/ Les sinus s'annulent tous dans le calcul de $S_q(\frac{1}{2})$. On a donc $S_q(\frac{1}{2})=0$. L'inégalité précédente donne alors, pour tout $q\in\mathbb{N}^*$,
$$\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\int_0^{(2q+1)\pi/2}\frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v\right|\leqslant\frac{A_1}{q}$$

On obtient donc que $\lim_{q\to+\infty}\int_0^{(2q+1)\pi/2}\frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v=\frac{\pi}{2}$. Puisque $\int_0^{+\infty}\frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v$ converge (à faire ici… mais ce n'est pas comme si on ne l'avait pas déjà rédigé ailleurs), on en déduit que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v=\lim_{q\to+\infty}\int_0^{(2q+1)\pi/2}\frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v=\frac{\pi}{2}.$$

3. Les fonctions S_q sont impaires et de période 1. Il suffit donc de les majorer sur $[0,1/2]$ pour obtenir une majoration sur $\mathbb{R}$. Pour $x\in[0,1/2]$, on a, pour $q\in\mathbb{N}^*$,

$$|S_q(x)|\leqslant|x|+\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{(2q+1)\pi x}\frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v\right|+\frac{A_1}{q}\leqslant\frac{1}{2}+A_1+|G(x)|$$

où $G(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{(2q+1)\pi x}\frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v$. La fonction G est continue sur $\mathbb{R}^+$, nulle en 0 et de limite $\frac12$ en $+\infty$. Elle est donc bornée (il existe M tel que pour tout $x\geqslant M$, $0\leqslant G(x)\leqslant 1$ et G est bornée sur le segment $[0,M]$). Cela permet de majorer, pour tout $x\in[0,\frac12]$, $|S_q(x)|$ par une constante A_2.

4. a/
- Pour $x=0$, on a $S_q(x)=0$ pour tout $q\in\mathbb{N}^*$ et donc la limite est nulle.
- Pour $x\in]0,1/2]$, toujours la même inégalité donne $\lim_{q\to+\infty}S_q(x)+x-\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2}=0$, soit $\lim_{q\to+\infty}S_q(x)=\frac{1}{2}-x$.
- Pour $x\in[-\frac12,0]$: on utilise l'imparité. On a $S_q(x)=-S_q(-x)$ et puisque $-x\in]0,\frac12]$, $\lim_{q\to+\infty}S_q(x)=-(\frac{1}{2}-(-x))=-x-1/2$.
- on revient à $x\in[\frac12,1[$. On a $S_q(x)=S_q(x-1)$ dont la limite est $-\frac12-(x-1)=\frac12-x$.

On a donc, pour tout $x\in]0,1[$, $\lim_{q\to+\infty}S_q(x)=\frac{1}{2}-x$ et, par périodicité, pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, $\lim_{q\to+\infty}S_q(x)=\frac{1}{2}-\langle x\rangle$.

b/ on propose deux versions :
- K est compact donc borné. Soit M tel que $K\subset[-M,M]$. On s'intéresse à $I_k=K\cap[k,k+1]$ où $k\in\mathbb{Z}$ avec $k\in[\![-M;M-1]\!]$. Si cet ensemble est non vide, il est toujours compact, ses bornes sont atteintes et elles ne sont pas dans $\mathbb{Z}$. Il existe donc $\alpha_k\in]0,1/2[$ tel que $I_k\subset[k+\alpha_k,k+1-\alpha]$ et pour tout $x\in I_k$, $|x-r|\geqslant\alpha_k$ pour tout entier $r\in\mathbb{Z}$. En prenant le α_k minimal (il y en a un nombre fini), on obtient le résultat souhaité.
- la fonction $\theta:x\mapsto d(x,\mathbb{Z})$ est 1-lipschitzienne donc continue sur $\mathbb{R}$. Elle est bornée sur le compact K et son minimum est atteint en un certain $x_0\in K$. On pose $\alpha=\theta(x_0)$. On a $\alpha>0$ car $x_0\notin\mathbb{Z}$ (on a en effet, si $k<x_0<k+1$, $d(x_0,\mathbb{Z})=\min(|x_0-k|,|k+1-x_0|$, les distances aux autres entiers étant strictement supérieures à 1). Pour tout $x\in K$ et $r\in\mathbb{Z}$, on a $|x-r|\geqslant d(x,\mathbb{Z})\geqslant d(x_0,\mathbb{Z})=\alpha$.

Il existe alors un entier p tel que $K\subset\bigcup_{k=-p}^{p}[k+\alpha,k+1-\alpha]$ (par exemple). On prouve la convergence uniforme sur $[\alpha,\frac12]$. On aura la même chose sur $[\frac12;1-\alpha]$ et par périodicité (et le nombre fini de segments), on aura la convergence uniforme sur K.

Soit $x\in[\alpha;\frac12]$. On a

$$\begin{aligned}\left|S_q(x)-(\frac{1}{2}-x)\right| &= \left|S_q(x)+x-\frac{1}{\pi}\int_0^{(2q+1)\pi x}\frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v+\frac{1}{\pi}\int_0^{(2q+1)\pi x}\frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v-\frac{1}{\pi}.\frac{\pi}{2}\right|\\ &\leqslant \frac{A_1}{q}+\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{(2q+1)\pi x}\frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v-\int_0^{+\infty}\frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v\right|=\frac{A_1}{q}+\frac{1}{\pi}\left|\int_{(2q+1)\pi x}^{+\infty}\frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v\right|\end{aligned}$$

On a $(2q+1)\pi x\geqslant(2q+1)\pi\alpha$. On se donne $\varepsilon>0$. Il existe M tel que, pour tout $y\geqslant M$, $\left|\int_y^{+\infty}\frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v\right|\leqslant\varepsilon$. Il existe alors un entier n_0, tel que, pour tout $q\geqslant n_0$, $(2q+1)\pi\alpha\geqslant y$ et ainsi pour tout $x\in[\alpha;\frac12]$, $(2q+1)\pi x\geqslant(2q+1)\pi\alpha\geqslant y$ ce qui entraîne $\left|\int_{(2q+1)\pi x}^{+\infty}\frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v\right|\leqslant\varepsilon$. Pour tout $x\in[\alpha;\frac12]$ et pour tout $q\geqslant n_0$, on a donc

$$\left|S_q(x)-(\frac{1}{2}-x)\right|\leqslant\frac{A_1}{q}+\frac{1}{\pi}\varepsilon$$

Il existe alors $n_1\geqslant n_0$ tel que, pour tout $q\geqslant n_1$, $\frac{A_1}{q}+\frac{1}{\pi}\varepsilon\leqslant\varepsilon$. On a bien obtenu, pour tout $x\in[\alpha;\frac12]$ et pour tout $q\geqslant n_1$, $\left|S_q(x)-(\frac12-x)\right|\leqslant\varepsilon$ ce qui donne la convergence uniforme de S_q vers $x\mapsto\frac12-x$ sur $[\alpha;\frac12]$. On a la même majoration sur $[-\frac12;-\alpha]$ par imparité et donc sur $[\frac12;1-\alpha]$ par périodicité. On a donc la convergence uniforme sur $[\alpha,1-\alpha]$. La périodicité nous donne la même majoration sur chaque $[k+\alpha;k+1-\alpha]$ et donc sur le compact K.

On a évidemment pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction limite simple n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ alors que chaque S_q l'est.

5. Pour $q \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_a^b f(x)S_q(x)\mathrm{d}t = \sum_{p=1}^{q}\int_a^b f(x)\frac{\sin(2p\pi x)}{p\pi}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{q}\frac{1}{p}\int_a^b f(x)\sin(2p\pi x)\mathrm{d}x$$

On doit donc justifier que le terme de gauche admet une limite finie lorsque $q \to +\infty$ et que cette limite est bien $\displaystyle\int_a^b f(x)\left(\frac{1}{2}-\langle x\rangle\right)\mathrm{d}x$.

On sait que S_q converge simplement vers la fonction φ qui vaut $\frac{1}{2}-\langle x\rangle$ si $x \notin \mathbb{Z}$ et 0 si $x \in \mathbb{Z}$. Cette fonction est continue par morceaux sur $[a,b]$. La suite de fonctions $(f.S_q)_{q\geqslant 1}$ converge simplement sur $[a,b]$ vers $f.\varphi$. Cette limite simple est continue par morceaux sur $[a,b]$ et on a, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $|f.S_q| \leqslant A_2.M$ où M est un majorant de la fonction continue $|f|$ sur le segment $[a,b]$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et permuter limite et intégrale.

Partie II

1. a/ si $z \neq 1$. On note $f(x) = \dfrac{1}{-z+1}x^{-z+1} = \dfrac{1}{-z+1}\exp((-z+1)\ln x)$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée vaut $f'(x) = \frac{1-z}{1-z}\frac{1}{x}\exp((-z+1)\ln x) = \exp((1-z)\ln x - \ln x) = x^{-z}$. Une primitive de $x \mapsto x^{-z}$ est bien $x \mapsto \frac{1}{-z+1}x^{-z+1}$. Lorsque $z=1$, $x \mapsto \ln x$ est une primitive (on ajoute une constante quelconque pour obtenir les autres primitives sur $\mathbb{R}_+^*$).

b/ Pour $n=1$, c'est immédiat. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel la relation est vraie. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}k^{-z} &= \sum_{k=1}^{n}k^{-z} + (n+1)^{-z} = 1 + \int_1^n x^{-z}\mathrm{d}x - z\int_1^n \langle x\rangle x^{-z-1}\mathrm{d}x + (n+1)^{-z}\\
&= 1 + \int_1^{n+1} x^{-z}\mathrm{d}x - z\int_1^{n+1}\langle x\rangle x^{-z-1}\mathrm{d}x - \int_n^{n+1}x^{-z}\mathrm{d}x + z\int_n^{n+1}\langle x\rangle x^{-z-1}\mathrm{d}x + (n+1)^{-z}\\
&= 1 + \int_1^{n+1} x^{-z}\mathrm{d}x - z\int_1^{n+1}\langle x\rangle x^{-z-1}\mathrm{d}x - \int_n^{n+1}x^{-z}\mathrm{d}x - \int_n^{n+1}(x-n)(-z.x^{-z-1})\mathrm{d}x + (n+1)^{-z}
\end{aligned}$$

On intègre par parties :

$$\int_n^{n+1}(x-n)x^{-z-1}\mathrm{d}x = \left[(x-n)x^{-z}\right]_n^{n+1} - \int_n^{n+1}x^{-z}\mathrm{d}x = (n+1)^{-z} - \int_n^{n+1}x^{-z}\mathrm{d}x$$

Les termes se simplifient et il reste $1 + \displaystyle\int_1^{n+1}x^{-z}\mathrm{d}x - z\int_1^{n+1}\langle x\rangle x^{-z-1}\mathrm{d}x$.

c/ On suppose que $s>0$ et $s \neq 1$. La relation précédente s'écrit

$$\sum_{k=1}^{n}k^{-s} = 1 + \int_1^n x^{-s}\mathrm{d}x - s\int_1^n \langle x\rangle x^{-s-1}\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{s-1}\left(1-n^{1-s}\right) - \int_1^n \langle x\rangle s x^{-s-1}\mathrm{d}x.$$

On a,puisque $\langle x\rangle \in [0,1[$,

$$0 \leqslant \int_1^n \langle x\rangle s x^{-s-1}\mathrm{d}x \leqslant \int_1^n \langle x\rangle s x^{-s-1}\mathrm{d}x \leqslant \int_1^n s x^{-s-1}\mathrm{d}x = \left[-x^{-s}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n^s} < 1.$$

On peut donc écrire $\displaystyle\int_1^n \langle x\rangle s x^{-s-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \theta_n$ avec $\theta_n \in [-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$. Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n}k^{-s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1}\left(1-n^{1-s}\right) + \theta_n \text{ avec } |\theta_n| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Si $s=1$, le même raisonnement conduit à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \ln n + \theta_n$.

2. a/ la fonction $x \mapsto \langle x\rangle x^{-z-1}$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$. On a $\left|\langle x\rangle x^{-z-1}\right| = \langle x\rangle x^{-\mathrm{Re}(z)-1} \leqslant \frac{1}{x^{1+\mathrm{Re}(z)}}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{1+\mathrm{Re}(z)}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ puisque $1+\mathrm{Re}(z) > 1$.

b/ Pour $s>1$, les intégrales $\displaystyle\int_1^n x^{-z}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^n \langle x\rangle x^{-z-1}\mathrm{d}x$ admettent une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$. Plus précisément

$$\int_1^n x^{-s}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{1-s}x^{-s+1}\right]_1^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{s-1}$$

ce qui donne (la série converge également)

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s} = 1 + \frac{1}{s-1} - s\int_1^{+\infty}\langle x\rangle x^{-s-1}\mathrm{d}x = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{+\infty}\langle x\rangle x^{-s-1}\mathrm{d}x = \zeta(s).$$

c/

$$\begin{aligned}
\zeta(s)-\sum_{k=1}^{n}k^{-z} &= \frac{z}{z-1}-z\int_1^{+\infty}\langle x\rangle x^{-z-1}\mathrm{d}x-1-\int_1^n x^{-z}\mathrm{d}x+z\int_1^n\langle x\rangle x^{-z-1}\mathrm{d}x\\
&= \frac{z}{z-1}-1-\left[\frac{1}{1-z}x^{-z+1}\right]_1^n-z\int_n^{+\infty}\langle x\rangle x^{-z-1}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{z-1}+\frac{n^{1-z}}{z-1}+\frac{1}{1-z}-z\int_n^{+\infty}\left(\langle x\rangle-\frac{1}{2}\right)x^{-z-1}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}z\int_n^{+\infty}x^{-z-1}\mathrm{d}x\\
&= \frac{n^{1-z}}{z-1}-\frac{1}{2}n^{-z}+z\int_n^{+\infty}\left(\frac{1}{2}-\langle x\rangle\right)x^{-z-1}\mathrm{d}x\\
&= \frac{n^{1-z}}{z-1}-\frac{1}{2}n^{-z}+z\int_n^{y}\left(\frac{1}{2}-\langle x\rangle\right)x^{-z-1}\mathrm{d}x+z\int_y^{+\infty}\left(\frac{1}{2}-\langle x\rangle\right)x^{-z-1}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

La partie précédente donne

$$\int_n^y\left(\frac{1}{2}-\langle x\rangle\right)x^{-z-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p}\int_n^y x^{-z-1}\sin(2p\pi x)\mathrm{d}x.$$

ce qui donne la formule demandée.

3. On calcule $g'(x)$:

$$g'(x)=\frac{3}{2}x^{-5/2}\frac{1}{2p\pi-\frac{t}{x}}+x^{-3/2}\frac{t/x^2}{(2p\pi-\frac{t}{x})^2}=x^{-5/2}\left(\frac{3/2}{2p\pi-\frac{t}{x}}+\frac{t/x}{(2p\pi-\frac{t}{x})^2}\right).$$

On a $|t/x|<1$ et $\dfrac{1}{2p\pi-\frac{t}{x}}\leqslant\dfrac{1}{2p\pi-1}$. On a également $2p\pi-1=p\pi+p\pi-1\geqslant p\pi$ (par exemple). Tout cela donne

$$g'(x)\leqslant x^{-5/2}\left(\frac{3/2}{p\pi}+\frac{1}{(p\pi)^2}\right)\leqslant\frac{x^{-5/2}}{p\pi}\left(\frac{3}{2}+1\right)=B_1.\frac{x^{-5/2}}{p}$$

avec $B_1=\frac{5}{2\pi}$. On peut même prendre $B_1=1$. On remarque également que $g'(x)=\dfrac{x^{-5/2}}{(2p\pi-t/x)}\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{t/x}{2p\pi-\frac{t}{x}}\right)$ et avec l'inégalité $\left|\dfrac{t/x}{2p\pi-\frac{t}{x}}\right|\leqslant 1$, on obtient $g'(x)\geqslant 0$ (on en a besoin pour majorer $|g'|$ dans la suite de la question).

On transforme :

$$\int_n^y x^{-3/2-it}e^{2ip\pi x}\mathrm{d}x=\int_n^y x^{-3/2}e^{2ip\pi x-it\ln x}\mathrm{d}x$$

La dérivée de $x\mapsto 2ip\pi x-it\ln x$ est $x\mapsto i(2p\pi-t/x)$. On a par conséquent

$$\int_n^y x^{-3/2-it}e^{2ip\pi x}\mathrm{d}x=\int_n^y -g(x)(2p\pi-\frac{t}{x})e^{2ip\pi x-it\ln x}\mathrm{d}x$$

on peut alors intégrer par parties :

$$\int_n^y x^{-3/2-it}e^{2ip\pi x}\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{i}g(x)e^{2ip\pi x-it\ln x}\right]_n^y+\frac{1}{i}\int_n^y g'(x)e^{2ip\pi x-it\ln x}\mathrm{d}x$$

Cela permet de majorer :

$$\left|\int_n^y x^{-3/2-it}e^{2ip\pi x}\mathrm{d}x\right|\leqslant|g(y)|+|g(n)|+\int_n^y|g'(x)|\mathrm{d}x$$

On a alors (majorations similaires à ce qu'on a fait avant), $|g(n)|\leqslant\dfrac{n^{-3/2}}{2p\pi-1}\leqslant\dfrac{n^{-3/2}}{p\pi}$ et de même avec $|g(y)|\leqslant\dfrac{y^{-3/2}}{p\pi}\leqslant\dfrac{n^{-3/2}}{p\pi}$ et

$$\int_n^y|g'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_n^y\frac{B_1}{p}x^{-5/2}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\frac{B_1}{p}\left[-x^{-3/2}\right]_n^y\leqslant\frac{2}{3}\frac{B_1}{p}n^{-3/2}$$

On peut factoriser le tout par $\dfrac{1}{pn^{3/2}}$ et on obtient une constante B_2 telle que $\left|\displaystyle\int_n^y x^{-3/2-it}e^{2ip\pi x}\mathrm{d}x\right|\leqslant\dfrac{B_2}{pn^{3/2}}$.

On effectue alors le même travail en remplaçant p par $-p$. On remplace également t par $-t$ qui reste dans $[-n,n]$. En posant $h(x)=\dfrac{-x^{-3/2}}{2(-p)\pi-(-t/x)}=-g(x)$, les calculs se déroulent de la même façon et on obtient $\left|\displaystyle\int_n^y x^{-3/2-it}e^{-2ip\pi x}\mathrm{d}x\right|\leqslant\dfrac{B_2}{pn^{3/2}}$.

Il ne reste plus qu'à écrire que $\sin(2p\pi x)=\dfrac{e^{2ip\pi x}-e^{-2ip\pi x}}{2i}$ pour majorer

$$\left|x^{-3/2-it}\sin(2ip\pi x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{2}\left(2\frac{B_2}{pn^{3/2}}\right)=\frac{B_2}{pn^{3/2}}.$$

4. On utilise la formule 2.c. avec $z=\dfrac{1}{2}+it$:

$$\zeta\left(\frac12+it\right)-\sum_{k=1}^{n}k^{-(\frac12+it)}=\frac{n^{\frac12-it}}{it-\frac12}-\frac12 n^{-\frac12-it}+(\frac12+it)\int_y^{+\infty}\left(\frac12-\langle x\rangle\right)x^{-\frac32-it}\mathrm{d}x+(\frac12+it)\frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac1p\int_n^y x^{-\frac32-it}\sin(2p\pi x)\mathrm{d}x.$$

et c'est parti pour majorer en module - avec $|n^{-it}|=|\exp(-it\ln n)|=1$

$$\left|\zeta\left(\frac12+it\right)-\sum_{k=1}^{n}k^{-(\frac12+it)}\right|\leqslant\frac{\sqrt{n}}{|\frac12+it|}+\frac{1}{2\sqrt{n}}+|\frac12+it|\int_y^{+\infty}\frac12 x^{-3/2}\mathrm{d}x+\left|\frac12+it\right|\frac1\pi\sum_{p=1}^{+\infty}\frac1p\frac{B_2}{n^{3/2}p}$$

Cette relation étant valable pour tout $y\geqslant n$, lorsque y tend vers $+\infty$, on obtient

$$\left|\zeta\left(\frac12+it\right)-\sum_{k=1}^{n}k^{-(\frac12+it)}\right|\leqslant\frac{\sqrt{n}}{|\frac12+it|}+\frac{1}{2\sqrt{n}}+\left|\frac12+it\right|\frac1\pi\sum_{p=1}^{+\infty}\frac1p\frac{B_2}{n^{3/2}p}$$

On vérifie que chaque terme est majoré sous la forme $K\dfrac{\sqrt{n}}{1+|t|}$ avec $|t|\leqslant n$.

- on a besoin d'avoir une minoration $\left|\dfrac12+it\right|\geqslant C(1+|t|)$. On a

$$(1+|t|)^2\leqslant 2(1+t^2)\leqslant 8(\frac14+\frac14t^2)\leqslant 8(\frac14+t^2)=8\left|\frac12+it\right|^2\text{ et donc }\frac{1}{\left|\frac12+it\right|}\leqslant\frac{2\sqrt2}{1+|t|}$$

- $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{n}}{2n}$ et $1+|t|\leqslant 1+n\leqslant 2n$ donc $\dfrac{1}{2n}\leqslant\dfrac{1}{1+|t|}$: finalement $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\leqslant\dfrac{\sqrt{n}}{1+|t|}$,
- le dernier terme se majore en $\left|\frac12+it\right|\dfrac{K}{n^{3/2}}$ avec $K=\dfrac{B_2}{\pi}\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}$. Or $\left|\frac12+it\right|\leqslant\frac12+|t|\leqslant 1+|t|$. Alors

$$\left|\frac12+it\right|\frac{1}{n^{3/2}}\leqslant\frac{1+n}{n^{3/2}}\leqslant 2\frac{n}{n^{3/2}}=\frac{2}{\sqrt{n}}$$

  et on termine comme avec la majoration précédente.

On a majorer chacun des 3 termes de la somme sous la forme $\dfrac{K\sqrt{n}}{1+|t|}$ ce qui permet d'obtenir la forme du majorant demandé.

Partie III

1. a/ On pose $f(x)=\ln x-1+\frac1x$ pour $x>0$. On a $f'(x)=\dfrac1x-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$. Un tableau de variation montre que f est minimale et nulle en $x=1$. On a donc, pour tout $x>0$, $\ln x-1+\frac1x\geqslant 0$.

b/ Le dénominateur est $\sqrt{kj}\ln\frac{k}{j}\geqslant\sqrt{kj}\left(1-\dfrac{j}{k}\right)=\sqrt{\frac{j}{k}}\left(k-j\right)$. On obtient alors

$$S=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\left(\sum_{k/2<j<k}\frac{1}{\sqrt{kj}\ln\frac{k}{j}}\right)\leqslant\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\left(\sum_{k/2<j<k}\sqrt{\frac{k}{j}}\frac{1}{k-j}\right)$$

Dans ces sommes, on a $\dfrac{k}{j}\leqslant 2$ et, avec $h=k-j$, $0<h<k/2$. Cela donne

$$S\leqslant\sqrt2\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\left(\sum_{0<h<k/2}\frac1h\right)\leqslant\sqrt2\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\left(\sum_{1\leqslant h\leqslant k}\frac1h\right)=\sqrt2\sum_{1\leqslant h\leqslant k\leqslant n}\frac1h.$$

c/ On majore la seconde somme pour $n \geqslant 2$

$$\sum_{1\leqslant h\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{h} = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=h}^{n} \frac{1}{h} = \sum_{h=1}^{n} \frac{n+1-h}{h} = (n+1)\sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h} - n$$

On a montré que $\sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h} = \frac{1}{2} + \ln n + \theta_n$ avec $\theta_n \leqslant \frac{1}{2}$. Cela donne une majoration par $(n+1)(1+\ln n) - n = 1 + (n+1)\ln n$. Ce terme est inférieur à $2n\ln n$. Finalement on a obtenu une majoration par $2\sqrt{2}n\ln n$.

2. a/ On a $\frac{k}{j} \geqslant 2$ donc $\frac{1}{\ln\frac{k}{j}} \leqslant \frac{1}{\ln 2}$. Cela donne

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{1\leqslant j\leqslant k/2} \frac{1}{\sqrt{kj}\ln\frac{k}{j}} \leqslant \frac{1}{\ln 2}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant k/2} \frac{1}{\sqrt{kj}}\right) \leqslant \frac{1}{\ln 2}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{j}}\right) = \frac{1}{\ln 2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2$$

b/ On a montré que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{2} - 2(1-\sqrt{n}) + \theta_n \leqslant 1 - 2 + 2\sqrt{n} = 2\sqrt{n} - 1 \leqslant 2\sqrt{n}$. Cela donne une majoration des sommes par $\frac{4}{\ln 2}n$.

c/ En utilisant $|z|^2 = z\overline{z}$, on obtient

$$\begin{aligned} I_n = \int_0^n \left|\sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{2}-it}\right|^2 \mathrm{d}t &= \int_0^n \left(\sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{2}-it}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j^{-\frac{1}{2}+it}\right)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{kj}}\int_0^n e^{-it\ln(\frac{k}{j})}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\int_0^n \mathrm{d}t + \sum_{j\neq k}\frac{1}{\sqrt{kj}}\int_0^n e^{-it\ln(\frac{k}{j})}\mathrm{d}t \\ &= n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{j\neq k}\frac{1}{\sqrt{kj}}\,\frac{e^{-in\ln\frac{k}{j}}-1}{-i\ln\frac{k}{j}} = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + i\sum_{j\neq k}\frac{\left(\frac{k}{j}\right)^{-in}-1}{\sqrt{kj}\ln\frac{k}{j}} \end{aligned}$$

d/ On a $\left|\left(\frac{k}{j}\right)^{-in}-1\right| \leqslant 2$. Cela donne

$$|I_n| \leqslant n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\frac{1}{\sqrt{kj}\ln\frac{k}{j}} + \sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}\frac{1}{\sqrt{kj}|\ln\frac{k}{j}|} = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + 2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\frac{1}{\sqrt{kj}\ln\frac{k}{j}}$$

et ainsi $|I_n| = I_n \leqslant n(1+\ln n) + 2(C_1 n\ln n + C_2 n)$ pour tout $n \geqslant 2$.La suite $(I_n/(n\ln n))_{n\geqslant 2}$ est alors majorée par une suite de limite $1+2C_1$. Elle est donc majorée ce qui donne l'existence d'une constante C_3 telle que, pour tout $n \geqslant 2$, $I_n \leqslant C_3 n\ln n$.

3. On vérifie avec le théorème sur les intégrales à paramètre que $t \mapsto \zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (ça se fait...) - on en a besoin pour l'existence de l'intégrale demandé. On met alors en commun les résultats : pour tout $t \in [-n,n]$, $\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) - \sum_{k=1}^{n} k^{-(\frac{1}{2}+it)}\right| \leqslant B_3\frac{\sqrt{n}}{1+|t|}$. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-(\frac{1}{2}+it)}$. On a

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 = \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) - S_n + S_n\right|^2 \leqslant 2\left(\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) - S_n\right|^2 + |S_n|^2\right) \leqslant 2\frac{B_3^2 n}{(1+t)^2} + 2|S_n|^2$$

- si $T \in [0,3]$: la fonction $t \mapsto \zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ est continue et donc bornée sur $[0,3]$. On note M un majorant du module. On a alors, pour $T \in [0,2]$, $\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t \leqslant M^2 T$ et, $\frac{1}{T\ln(T+2)}\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t \leqslant \frac{M^2}{\ln 2}$
- si $T > 3$. On choisit $n \geqslant 2$ tel que $n-1 < T \leqslant n$. On a

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_0^n \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_0^n \frac{2B_3^2 n}{(1+t)^2}\mathrm{d}t + 2C_3 n\ln n = 2B_3^2 n\left(1 - \frac{1}{1+n}\right) + 2C_3 n\ln n \leqslant 2B_3^2 n + 2C_3 n\ln n$$

ce majorant est équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ à $2C_3 n\ln n$ et donc à $2C_3 T\ln(T+2)$ (par encadrement.. on pourrait rédiger mieux mais l'idée est là). La fonction $T \mapsto \frac{1}{T\ln(T+2)}\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \mathrm{d}t$ va être majorée par une fonction de limite finie en $+\infty$. Elle est donc bornée sur $[3;+\infty[$.

En combinant le tout, on trouve un majorant sous la forme $CT\ln(T+2)$ pour tout $T \geqslant 0$.