ECOLE POLYTECHNIQUE **OPTION M'**

CONCOURS D'ADMISSION 1983

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

* * *

Dans tout le problème, on note $\langle x \rangle$ la *partie fractionnaire* du nombre réel x, c'est à dire le nombre réel de l'intervalle $[0, 1[$ tel que $x - \langle x \rangle$ appartienne à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Les parties **II** et **III** peuvent être traitées en ne connaissant de la partie **I** que le résultat indiqué par l'énoncé dans **I.5.**

Partie I

1. Pour tout x réel et tout entier $q \geqslant 1$, on pose $S_q(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{q} \frac{\sin 2p\pi x}{p\pi}$. Montrer que

$$S_q(x) = \int_0^x \frac{\sin{(2q+1)\pi u}}{\sin \pi u} du - x.$$

2. On définit sur $]-1, 1[$ la fonction φ par $\varphi(0) = 0$ et, pour tout u tel que $0 < |u| < 1$,

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sin \pi u} - \frac{1}{\pi u}.$$

   (a) Montrer que φ est continuement dérivable sur $]-1, 1[$.

   (b) Etablir l'existence d'une constante réelle A_1 telle que pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$ et tout entier $q \geqslant 1$,

$$\left| S_q(x) + x - \frac{1}{\pi} \int_0^{(2q+1)\pi x} \frac{\sin v}{v} dv \right| \leqslant \frac{A_1}{q}.$$

   (c) Calculer $S_q\left(\frac{1}{2}\right)$ et déduire de l'inégalité précédente la convergence et la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin v}{v} dv.$

3. Etablir l'existence d'une constante réelle A_2 telle que, pour tout x réel et tout entier $q \geqslant 1$, $|S_q(x)| \leqslant A_2$.

4. (a) Trouver en fonction de x la limite de la suite $(S_q(x))_{q \in \mathbb{N}^*}$, où $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers strictement positifs.

   (b) Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}$ disjointe de $\mathbb{Z}$. Etablir l'existence d'un nombre α strictement positif tel que, pour tout $x \in K$ et tout $r \in \mathbb{Z}$, on ait $|x - r| \geqslant \alpha$. La convergence de la suite $(S_q)_{q \in \mathbb{N}^*}$ est-elle uniforme sur K ? Est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

5. On rappelle que les intégrales de fonctions à valeurs complexes d'une variable réelle ont les mêmes propriétés opératoires que les intégrales de fonctions à valeurs réelles. Montrer que pour tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et toute fonction f continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$, on a

$$\int_a^b f(x) \left(\frac{1}{2} - \langle x \rangle \right) dx = \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p} \int_a^b f(x) \sin 2p\pi x \, dx.$$

Partie II

Dans toute la suite du problème, pour tout couple $(x, z) \in]0, +\infty[\times \mathbb{C}$, on note x^z le nombre réel ou complexe $e^{z \ln x}$, et la partie réelle et la partie imaginaire de z seront respectivement désignées par s et t. De plus, dans cette partie **II**, n est un entier strictement positif.

1. (a) Pour z complexe fixé, quelles sont les primitives de la fonction $x \mapsto x^{-z}$?

   (b) Etablir par récurrence sur n l'égalité
$$\sum_{k=1}^{n} k^{-z} = 1 + \int_1^n x^{-z} dx - z \int_1^n \langle x \rangle x^{-z-1} dx.$$

   (c) En déduire pour s strictement positif et différent de 1 une valeur approchée à $0,5$ près de $\sum_{k=1}^{n} k^{-s}$ sous forme d'une fonction affine d'une puissance de n (on explicitera l'exposant de cette puissance et les coefficients de la fonction affine). Comment se résultat se modifie-t-il si $s = 1$?

2. (a) Vérifier que si la partie réelle s de z est strictement positive, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \langle x \rangle x^{-z-1} dx$ converge.

   (b) Soit Ω le complémentaire du point 1 dans le demi-plan complexe $s > 0$; on définit dans Ω la fonction ζ par
$$\zeta(z) = \frac{z}{z-1} - z \int_1^{+\infty} \langle x \rangle x^{-z-1} dx.$$
   Comparer, pour $s > 1$, $\zeta(s)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-s}$.

   (c) Etablir, pour tout $z \in \Omega$ et tout réel $y \geqslant n$, l'égalité
$$\zeta(z) - \sum_{k=1}^{n} k^{-z} = \frac{n^{1-z}}{z-1} - \frac{1}{2} n^{-z} + z \int_y^{+\infty} \left(\frac{1}{2} - \langle x \rangle \right) x^{-z-1} dx + \frac{z}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p} \int_n^y x^{-z-1} \sin 2p\pi x \, dx.$$

3. On donne un entier $p > 0$ et un réel $t \in [-n, n]$ et on note g la fonction définie sur $[n, +\infty[$ par
$$g(x) = \frac{-x^{-3/2}}{2p\pi - \dfrac{t}{x}}.$$
Déterminer numériquement un nombre réel B_1 tel que pour tout $x \in [n, +\infty[$ on ait $g'(x) \leqslant \dfrac{B_1}{p} x^{-5/2}$, puis un nombre réel B_2 tel que pour tout $y \in [n, +\infty[$ on ait
$$\left| \int_n^y x^{-\frac{3}{2} - it} e^{2ip\pi x} dx \right| \leqslant \frac{B_2}{n^{3/2} p} \quad \text{et} \quad \left| \int_n^y x^{-\frac{3}{2} - it} \sin 2p\pi x \, dx \right| \leqslant \frac{B_2}{n^{3/2} p}$$
(on ne demande pas de déterminer les réels B_1 et B_2 les plus petits possibles).

4. Etablir l'existence d'un nombre réel B_3 tel que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $t \in [-n, n]$ on ait
$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it \right) - \sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{2} - it} \right| \leqslant B_3 \frac{\sqrt{n}}{1 + |t|}.$$

Partie III

Dans cette partie, n est un entier au moins égal à 2.

1. (a) Quel est, pour x réel strictement positif, le signe de la fonction $x \mapsto \ln x - 1 + \dfrac{1}{x}$?

   (b) Etablir l'inégalité
$$\sum_{\substack{j,k \\ 1 \leqslant k \leqslant n \\ k/2 < j < k}} \frac{1}{\sqrt{kj} \ln \frac{k}{j}} \leqslant \sqrt{2} \sum_{\substack{h,k \\ 1 \leqslant h \leqslant k \leqslant n}} \frac{1}{h}$$
   où la première somme est prise égale à 0 si son ensemble d'indexation est vide, c'est à dire si $n = 2$.

(c) Montrer l'existence d'un nombre réel C_1 tel que $C_1 n \ln n$ majore pour tout n les deux membres de l'inégalité précédente.

2. (a) Etablir l'inégalité

$$\sum_{\substack{j,k \\ 1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant k/2}} \frac{1}{\sqrt{kj}\,\ln \frac{k}{j}} \leqslant \frac{1}{\ln 2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2.$$

(b) Montrer l'existence d'un nombre réel C_2 tel que $C_2 n$ majore pour tout n les deux membres de l'inégalité précédente.

(a) Etablir l'inégalité

$$\int_0^n \left|\sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{2}-it}\right|^2 dt = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + i \sum_{\substack{j,k \\ 1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq k}} \frac{\left(\frac{k}{j}\right)^{-in} - 1}{\sqrt{kj}\,\ln \frac{k}{j}}.$$

(b) Montrer l'existence d'un nombre réel C_3 tel que $C_3 n \ln n$ majore pour tout n les deux membres de l'inégalité précédente.

3. Démontrer qu'il existe un réel C tel que pour tout réel positif T on ait

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 dt \leqslant C T \ln (T+2).$$