# Critère de diagonalisation de Klarès

## Décomposition de Dunford

1/ Les polynômes $P_1,\dots,P_r$ sont deux à deux premiers entre eux et $P = P_1\dots P_r$ est annulateur de $f$ (théorème de Cayley-Hamilton). Le théorème de décomposition des noyaux donne la décomposition.

2/ Pour tout $x \in F_i$, on a $(f_i - \lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_i}(x) = 0$ donc $P_i$ est un polynôme annulateur de $f_i$. Sa seule racine est $\lambda_i$ et puisque les racines de $\chi_{f_i}$ sont des racines de ce polynôme annulateur $P_i$, il existe $\beta_i$ tel que $\chi_{f_i} = (X-\lambda_i)^{\beta_i}$. Par déterminant par blocs (et stabilité des sous-espaces $F_i$, on a $\chi_f = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\beta_i}$. Par unicité de l'écriture, on a $\beta_i = \alpha_i$ pour tout $i \in [\![1;r]\!]$.

3/ $f_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i}$ est un endomorphisme nilpotent de $F_i$. D'après la question précédente, on a $\beta_i = \dim F_i = \alpha_i$. On choisit $\mathscr{B}_i$ une base de $F_i$. La matrice de $f_i$ dans cette base est sous la forme $\lambda I_{\alpha_i} + N_i$. Dans la base concaténée, la matrice de $f$ est sous la forme donnée.

4/ On note $D'$ la matrice diagonale de diagonale $\lambda_1 I_{\alpha_1},\dots,\lambda_r I_{\alpha_r}$ et $N'$ la matrice diagonale par blocs avec les blocs $N_1,\dots,N_r$. On a, par produit par blocs, $D'N' = N'D'$. On note alors $D = PD'P^{-1}$ et $N = PN'P^{-A}$. On a $A = D+N$, $D$ est diagonalisable (semblable à la matrice diagonale $D'$), $N$ est nilpotente (car $N'$ l'est - on prend le maximum des indices de nilpotente des matrices $N_i$) et enfin $ND = (PN'P^{-1})(PD'P^{-1}) = P(N'D')P^{-1} = DN$.

5/ Le principe :

- on déterminer le polynôme caractéristique, puis une base des espaces caractéristiques ce qui donne la matrice de passage $P$.
- dans la base adaptée, on a l'expression de $D'$ (inutile de chercher $N'$). On pose alors $D = PD'P^{-1}$ et $N = A - D$.

Dans ce cas particulier,

- $\chi_A = (X-2)^2(X-1)$,
- l'espace propre $E_1$ est dirigé par $(0,1,1)$
- On résout $(A-2I_3)^2X = 0$, ce qui donne le plan d'équation $x-y=0$ avec pour base $(1,1,0)$ et $(0,0,1)$.
- Soit $P = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ et $D' = \mathrm{diag}(1,2,2)$. On pose

$$D = P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

On vérifie, pour se rassurer, que $N^2 = 0$.

## Commutation et conjugaison

6/ On évalue, pour $X \in M_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}\mathrm{conj}_{P^{-1}}\circ\mathrm{comm}_A\circ\mathrm{conj}_P(X) &= P^{-1}(A(PXP^{-1})-(PXP^{-1})A))P = (P^{-1}AP)X - X(P^{-1}AP)\\ &= \mathrm{comm}_{P^{-1}AP}(X) = \mathrm{comm}_{\mathrm{conj}_P(A)}X\end{aligned}$$

7/ On calcule de nouveau $\mathrm{comm}_A(E_{ij}) = AE_{ij} - AE_{ij}$. Si $A = \sum_{j=1}^{n}\lambda_k E_{kk}$, on a $AE_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k E_{kk}E_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\lambda_k\delta_{ik}E_{kj} = \lambda_i E_{ij}$. On effectue un calcul similaire pour $E_{ij}A = \lambda_j E_{ij}$. On a donc $\mathrm{comm}_A(E_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}$. Les vecteurs $E_{ij}$ forment donc une base de vecteurs propres pour $\mathrm{comm}_A$. On en déduit que $\mathrm{comm}_A$ est diagonalisable avec comme valeurs propres les $\lambda_i - \lambda_j$.

8/ Si $A$ est diagonalisable alors il existe $P$ inversible et $D$ diagonale telles que $P^{-1}AP = D$. On remarque alors que $\mathrm{conj}_{P^{-1}} = (\mathrm{conj}_P)^{-1}$, ce qui donne $\mathrm{conj}_{P^{-1}}\circ\mathrm{comm}_A\circ\mathrm{conj}_P = (\mathrm{conj}_P)^{-1}\circ\mathrm{comm}_A\circ\mathrm{conj}_P = \mathrm{comm}_D$. L'endomorphisme $\mathrm{comm}_D$ est diagonalisable et ainsi $\mathrm{comm}_A$ est diagonalisable avec les mêmes valeurs propres.

9/
- On regarde ce que donnent les premières puissances :

$$\begin{aligned}(\mathrm{comm}_A)^2(X) &= \mathrm{comm}_A(AX-XA) = A^2X - 2AXA + XA^2\\ (\mathrm{comm}_A)^3(X) &= A(A^2X-2AXA+XA^2) - (A^2X-2AXA+XA^2)A\\ &= A^3X - 3A^2XA + 3AXA^2 - XA^3\end{aligned}$$

on montre alors par récurrence que $(\mathrm{comm}_A)^k(X) = \sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{k}{p}A^{k-p}XA^p$.

- On note $f : X \mapsto AX$ et $g : X \mapsto XA$. On vérifie que $f$ et $g$ commutent, que $\mathrm{comm}_A = f-g$, ce qui permet d'utiliser la formule du binôme pour calculer $\mathrm{comm}_A^k$.

Si $A$ est nilpotente d'ici $m$ alors $\mathrm{comm}_A$ est nilpotente puisque $\mathrm{comm}_A^{2m} = 0$ (dans chaque terme de la somme l'un entre $A^p$ où $A^{2m-p}$ est nul).

10/ Si $\mathrm{comm}_A$ est nul alors $A$ commute avec toutes les matrices. On montre alors que $A$ est une matrice scalaire : on écrit pour les différentes valeurs de $i$ et $j$ que $AE_{ij} = E_{ij}A$ ce qui donne $a_{ii} = a_{jj}$ et les autres termes sont nuls). La matrice est donc $A = \lambda I_n$. Si $A$ est nilpotente alors $\lambda = 0$ est $A$ est la matrice nulle.

11/ On note $A = D + N$ avec les notations précédentes. On a facilement $\text{comm}_A = \text{comm}_D + \text{comm}_N$ avec $\text{comm}_D$ diagonalisable et $\text{comm}_N$ nilpotente. On se demande donc si on a bien obtenu la décomposition de Dunford de $\text{comm}_A$. Pour cela , il reste à montrer que $\text{comm}_D$ et $\text{comm}_N$ commutent. On a

$$(\text{comm}_D \circ \text{comm}_N)(X) = D(NX - XN) - (NX - XN)D = DNX - DXN - NXD + XND$$

$$(\text{comm}_N \circ \text{comm}_D)(X) = N(DX - XD) - (DX - XD)N = NDX - NXD - DXN + XDN$$

et en utilisant le fait que $N$ et $D$ commutent, on a bien que $\text{comm}_D \circ \text{comm}_N = \text{comm}_N \circ \text{comm}_D$. La décomposition de Dunford de $\text{comm}_A$ est bien $\text{comm}_A = \text{comm}_D + \text{comm}_N$. On utilise alors l'unicité de la décomposition : si $A$ est diagonalisable et $A = D + N$ est la décomposition de Dunford, on a $A = A + 0 = D + N$ avec $A$ et $D$ diagonalisables et $N$ et 0 nilpotente. Par unicité, si $A$ est diagonalisable alors $D = A$ et $N = 0$. Réciproquement si $N = 0$ alors $A = D$ est diagonalisable. On a ainsi montré que $A$ est diagonale si et seulement si la partie nilpotente dans la décomposition de Dunford est nulle. On applique cela à $\text{comm}_A$ qu'on suppose diagonalisable. On a donc $\text{comm}_N$ nulle avec $N$ nilpotente. On en déduit que $N = 0$ et ainsi que $A$ est diagonalisable. On a donc montré que si $\text{comm}_A$ est diagonalisable alors $A$ l'est. La réciproque est immédiate d'après la décomposition de Dunford de $\text{comm}_A$.

## Formes bilinéaires sur un espace vectoriel complexe

12/ On a toujours $\ker u \subset \ker u^2$ (si $u(x) = 0$ alors $u^2(x) = 0$). Si $u$ est diagonalisable, il existe une base dans laquelle la matrice de $u$ est diagonale $D = (0, \dots, 0, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n)$ où les $\lambda_i$ sont non nuls. On a alors $D^2 = (0, \dots, 0, \lambda_{k+1}^2, \dots, \lambda_n^2)$ et ainsi $\text{rg}\, u = \text{rg}\, u^2$ donc $\dim \ker u = \dim \ker u^2$. L'inclusion donne alors l'égalité $\ker u = \ker u^2$. Supposons maintenant que $\ker u = \ker u^2$. Si $y \in \ker u \cap \text{Im}\ u$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et $u(y) = 0$. On a donc $u^2(x) = 0$ donc $x \in \ker u^2 = \ker u$. Finalement $y = u(x) = 0$.

13/ On considère une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \varphi_i = 0$. Pour tout $x \in E$, on a $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i b(\varepsilon_i, x) = 0$. Cela donne $b(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \varepsilon_i, x) = 0$ pour tout $x \in E$ et puisque $b$ est non dégénérée, $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \varepsilon_i = 0$. par hypothèse, $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ sont nuls.

14/ Soit $x \in E$. Il se décompose en $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$. On a alors $x \in F^{\perp_b}$ si et seulement si, pour tout $y \in F$, $b(x, y) = 0$. Par linéarité de $b$, cela revient à $b(x, y) = 0$ lorsque $y$ décrit une base de $F$ : pour tout $i \in [\![1; q]\!]$, $b(x, \varepsilon_i) = 0$. On a $b(e_j, \varepsilon_i) = \varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$. Ainsi $b(x, \varepsilon_i) = x_i$. Ainsi $x \in F^{\perp_b}$ si et seulement si $x$ s'écrit $x = \sum_{i=q+1}^{q} x_i e_i$ donc si et seulement si $x \in \text{Vect}(e_{q+1}, \dots, e_p)$.
On a le premier résultat, ainsi que $\dim F^{\perp_b} = p - q$ et $\dim F^{\perp_b} + \dim F = p - q + q = p = \dim E = \dim E^*$.

## Critère de Klarès

15/ On vérifie facilement qu'elle est bilinéaire et symétrique. On vérifie qu'elle est non dégénérée : si $X$ vérifie, pour tout $Y \in M_n(\mathbb{C})$, $\varphi(X, Y) = \text{tr}(XY) = 0$, alors on a notamment $\text{tr}(XE_{ij})) = X_{ji} = 0$. Ainsi $X$ est la matrice nulle.

16/ Par le théorème du rang (dans $M_n(\mathbb{C})$) et la question **14**, on sait que les deux espaces sont de même dimension. Il suffit de montrer une inclusion. C'est souvent plus simple de montrer qu'on est dans un orthogonal (vérifier que des quantités sont nulles). Soit $B \in \text{Im}\,\text{comm}_A$. Il existe $X \in M_n(X)$ telle que $B = AX - XA$. Soit $C \in \ker \text{comm}_A$ : on a $AC - CA = 0$. On évalue

$$\begin{aligned} \varphi(C, B) &= \text{tr}(CB) = \text{tr}(C(AX - XA)) = \text{tr}(CAX) - \text{tr}(CXA) = \text{tr}(CAX) - \text{tr}(XAC) \\ &= \text{tr}(CAX) - \text{tr}(XCA) = \text{tr}(CAX) - \text{tr}(CAX) = 0 \end{aligned}$$

On a bien $B$ orthogonale pour $\varphi$ à $\ker \text{comm}_A$ d'où l'inclusion souhaitée et l'égalité.

17/ On veut démontrer que $A$ est dans l'image de $\text{comm}_A$ et donc que $A$ est orthogonale à $\ker(\text{comm}_A)$ (sachant que $A$ est nilpotente). On prend $C \in \ker \text{comm}_A$ c'est-à-dire que $AC = CA$. On veut $\varphi(A, C) = \text{tr}(AC) = 0$. Or $A$ est nilpotente et $C$ commute avec $A$ donc $(AC)^k = A^k C^k = 0$ dès que $A^k = 0$. La matrice $AC$ est nilpotente. Sa seule valeur propre est 0, la matrice est trigonalisable avec des 0 sur la diagonale donc $\text{tr}(AC) = 0$. On a ensuite $\text{comm}_{A+\lambda I_n}(X) = (A + \lambda I_n)X - X(A + \lambda I_n) = AX - XA = \text{comm}_A(X)$.

18/ On reprend toutes les notations de la partie $A$, notamment $N$ sous la forme d'une matrice diagonale par blocs avec les blocs $N_1, \dots, N_r$. On a d'après la partie précédente, l'existence de $X$ tel que $N_i = \text{comm}_{N_i}(X)$, ce qui ne nous suffit pas. En revanche on a également l'existence de $X_i$ telle que $N_i = \text{comm}_{\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i}(X_i) = (\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i)X_i - X_i(\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i)$. On considère alors la matrice $X$ diagonale par blocs de diagonale $X_1, \dots, X_r$. Par produit par blocs, $AX - XA = N$. On a bien $N = \text{comm}_A(X)$.

19/
- Si $A$ est diagonalisable alors $\text{comm}_A$ l'est aussi (partie B). D'après la question **12**, cela entraîne $\ker(\text{comm}_A) = \ker(\text{comm}_A^2)$.
- Supposons l'égalité des deux noyaux. On a $\ker(\text{comm}_A) \cap \text{Im}\,(\text{comm}_A) = \{0\}$. On reprend la décomposition de Dunford de $A$ (avec $D$ et $N$). On a $N \in \text{Im}\,\text{comm}_A$ d'après la question précédente. De plus $D$ et $N$ commutent donc $D + N$ et $N$ aussi. Ainsi $A$ et $N$ commutent donc $N \in \ker(\text{comm}_A)$. Finalement $N = 0$ et $A = D + 0$ est diagonalisable.