

Critère de diagonalisation de Klarès

Soit n un entier naturel non nul et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices d'ordre n à coefficients complexes. On note O_n la matrice nulle et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La *trace* d'une matrice U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est notée $\text{tr}(U)$. On dit que deux matrices U et V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *commutent* si $UV = VU$. Une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier $k > 0$ pour lequel $N^k = O_n$.

Dans tout le problème, on considère une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé, c'est-à-dire l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est A . Le polynôme caractéristique de A est noté P et les valeurs propres complexes distinctes de A sont notées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$. Pour tout $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, on note :

- α_i l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i , c'est-à-dire l'ordre de multiplicité de la racine λ_i du polynôme P ;
- P_i le polynôme défini par : $P_i(X) = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$;
- F_i le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ défini par $F_i = \text{Ker}((f - \lambda_i \text{Id}_{\mathbb{C}^n})^{\alpha_i})$;
- f_i l'endomorphisme de F_i obtenu par restriction de f à F_i .

Décomposition de Dunford

- 1/ Justifier que l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est somme directe des espaces $F_i : \mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r F_i$.
- 2/ En considérant une base de $\mathbb{C}^n$ adaptée à la somme directe précédente, montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, le polynôme caractéristique de f_i est P_i . (On pourra d'abord établir que P_i est un polynôme annulateur de f_i .)
- 3/ Montrer qu'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A' = P^{-1}AP$ soit une matrice définie par blocs de la forme suivante :

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix}$$

où $N_i \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{C})$ est nilpotente pour tout $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$.

- 4/ En déduire que la matrice A s'écrit sous la forme $A = D + N$, où D est une matrice diagonalisable et N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent. Les matrices D et N vérifiant ces conditions constituent la *décomposition de Dunford* de la matrice A . Dans toute la suite du problème, on admettra l'*unicité* de cette décomposition, c'est-à-dire que D et N sont déterminées de façon unique par A .

- 5/ Un exemple pour $n = 3$: calculer la décomposition de Dunford de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Commutation et conjugaison

Pour toute matrice B et toute matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note comm_B et conj_P les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définis par :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \begin{cases} \text{comm}_B(X) = BX - XB \\ \text{conj}_P(X) = PXP^{-1}. \end{cases}$$

Le but de cette partie est de démontrer que A est diagonalisable si et seulement si comm_A est diagonalisable.

- 6/ Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer $\text{conj}_{P^{-1}} \circ \text{comm}_A \circ \text{conj}_P$.

Pour tous $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne qui est égal à 1.

- 7/ Si A est une matrice diagonale, montrer que, pour tous $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, comm_A admet $E_{i,j}$ comme vecteur propre. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de comm_A .
- 8/ En déduire que si A est diagonalisable, comm_A l'est aussi.
- 9/ Montrer que si A est nilpotente, comm_A l'est également, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k > 0$ pour lequel $(\text{comm}_A)^k$ est l'endomorphisme nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- 10/ Montrer que si A est nilpotente et si comm_A est l'endomorphisme nul, alors A est la matrice nulle. D'après la partie A, l'endomorphisme comm_A admet une décomposition de Dunford de la forme $\text{comm}_A = d + n$, où les endomorphismes diagonalisable d et nilpotent n commutent : $dn = nd$.
- 11/ Déterminer la décomposition de Dunford de comm_A à l'aide de celle de A et conclure.

Formes bilinéaires sur un espace vectoriel complexe

Soit p un entier > 0 et E un espace vectoriel de dimension p sur $\mathbb{C}$. On note E^* le dual de E , c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur E .

On considère une forme bilinéaire symétrique b sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire une application $b : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ linéaire par rapport à chacune des composantes et telle que $b(x, y) = b(y, x)$ pour tous $x, y \in E$. Si F est un sous-espace vectoriel de E , on appelle *orthogonal de F relativement à b* le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$F^{\perp b} = \{x \in E; \forall y \in F, b(x, y) = 0\}.$$

On suppose que b est *non dégénérée*, c'est-à-dire que $E^{\perp b} = \{0\}$.

12/ Soit u un endomorphisme de E . Démontrer les implications suivantes :

$$(i) \ u \text{ est diagonalisable} \Rightarrow (ii) \operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u^2) \Rightarrow (iii) \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}.$$

Soit F un sous-espace vectoriel de E , de dimension q et soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_q)$ une base de F . Pour tout $i \in \llbracket 1; q \rrbracket$, on note φ_i la forme linéaire sur E définie par : $\varphi_i(x) = b(\varepsilon_i, x)$.

13/ Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q)$ est une famille libre de E^* .

On complète cette famille en une base $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ de E^* et on note $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ la base de E *antéduale* (dont $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ est la base duale - c'est-à-dire l'unique base de E telle que $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$ si $i, j \in \llbracket 1; p \rrbracket$).

14/ Montrer que $F^{\perp b}$ est engendré par $(e_{q+1}, e_{q+2}, \dots, e_p)$ et en déduire la valeur de

$$\dim(F) + \dim(F^{\perp b}).$$

Critère de Klarès

Le but de cette partie est de démontrer que

$$A \text{ est diagonalisable si et seulement si } \operatorname{Ker}(\operatorname{comm}_A) = \operatorname{Ker}((\operatorname{comm}_A)^2).$$

15/ Montrer que l'application φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$, définie par $\varphi(X, Y) = \operatorname{tr}(XY)$ pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

16/ Établir l'égalité : $(\operatorname{Ker}(\operatorname{comm}_A))^{\perp \varphi} = \operatorname{Im}(\operatorname{comm}_A)$.

17/ En déduire que, si A est nilpotente, il existe une matrice X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$A = \operatorname{comm}_A(X).$$

Calculer alors $\operatorname{comm}_{A+\lambda I_n}(X)$ pour tout λ dans $\mathbb{C}$.

Soit D et N les matrices de la décomposition de Dunford de A définies à la question 4).

18/ Démontrer qu'il existe une matrice X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $N = \operatorname{comm}_A(X)$.

19/ Conclure.