Représentation matricielle Ae^A

I. Préliminaire sur la représentation ze^z dans $\mathbb{C}$

1/ On reporte dans l'équation : $Re^{i\theta}e^{R\cos\theta+iR\sin\theta} = (Re^{R\cos\theta})e^{i(\theta+R\sin\theta)} = re^{i\alpha}$. Puisque $Re^{R\cos\theta} > 0$, l'équation est vérifiée si et seulement si $Re^{R\cos\theta} = r$ et $\theta + R\sin\theta = \alpha[2\pi]$. La dernière équation se récrit $R\sin\theta = \alpha - \theta[2\pi]$.

2/
- limite en 0^+ : on a $\alpha-\theta$ de limite $\alpha > 0$, $\dfrac{1}{\sin\theta}$ et $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ de limite $+\infty$ et $\lim\limits_{\theta\to 0^+}\varphi(\theta) = +\infty$.
- limite en π^- : on écrit $\varphi(\theta) = \dfrac{1}{\cos\theta}u(\theta)e^{u(\theta)}$ avec $u = (\alpha-\theta)\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$. On a $\lim\limits_{\theta\to\pi^-} u(\theta) = -\infty$. Puisque $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^u = 0$, on a, par composition, $\lim\limits_{\theta\to\pi^-}\varphi(\theta) = 0$.

Par continuité de φ sur $]0,\pi[$, pour tout $r > 0$, l'équation $\varphi(\theta) = r$ admet au moins une solution dans $]0,\pi[$.

3/ Le cas de l'équation $ze^z = 0$ est immédiat avec $z = 0$. Soit $\omega \in \mathbb{C}^*$ avec les notations de la première question. Soit $\theta \in]0,\pi[$ tel que $\varphi(\theta) = r$ et $R = \dfrac{\alpha-\theta}{\sin\theta}$. Alors $R > 0$ et R et θ vérifient le système obtenu en 1/. L'équation a bien une solution et g est surjective de D dans $\mathbb{C}$.

II. Représentation Ae^A d'un bloc de Jordan

Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice n.

4/ Puisque $N^{n-1} \neq 0$, $\ker N^{n-1} \neq M_n(\mathbb{C})$ et il existe X tel que $N^{n-1}X \neq 0$. La suivante.. déjà faite je ne sais combien de fois.

5/ La famille $(X, NX, ..., N^{n-1}X)$ est libre et comporte n vecteurs. C'est donc une base de $M_{n1}(\mathbb{C})$. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à N. Dans la base $(N^{n-1}X, \dots, NX, X)$, la matrice de u est $J_n(0)$ donc N est semblable à cette matrice.

6/
- Soit $A = e^{J_n(0)}$. La matrice A est inversible d'inverse $e^{-J_n(0)}$.
- On montre ensuite que pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, M et e^M commutent : soit $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{M^k}{k!}$. On a $MS_p = S_pM$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Puisque les applications $B \mapsto BM$ et $B \mapsto MB$ (dans $M_n(\mathbb{C})$) sont linéaires en dimension finie, elles sont continues. En passant à la limite, on a $Me^M = e^M M$.
- On a alors, avec $B = J_n(0)$, $(Be^B)^k = B^k(e^B)^k$. La matrice $(e^B)^k$ est inversible donc $(Be^B)^k$ est nulle si et seulement si B^k est nulle. Pour $k = n-1$, elle ne l'est pas mais pour $k = n$, elle l'est.

Finalement la matrice Be^B est nilpotente d'indice n.

7/
- Même argument : on utilise la continuité de $\psi : M \mapsto PMP^{-1}$ qui est linéaire sur $M_n(\mathbb{C})$. On a
$$P\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{J_n(0)^k}{k!}\right)P^{-1} = \sum_{k=0}^{N}\frac{(PJ_n(0)P^{-1})^k}{k!},$$
le terme de droite tend vers $\exp(PJ_n(0)P^{-1})$, celui de gauche vers $P\exp(J_n(0))P^{-1}$ en utilisant la continuité de ψ (on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{J_n(0)^k}{k!}$ qui tend vers $\exp(J_n(0))$ et $\psi\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{J_n(0)^k}{k!}\right)$ vers $\psi(J_n(0))$). On obtient bien $Pe^{J_n(0)}P^{-1} = e^{PJ_n(0)P^{-1}}$.
- On note $B = J_n(0)$. On a vu que Be^B est nilpotente d'indice exactement n donc semblable à la matrice $J_n(0)$. Il existe P inversible telle que
$$\begin{aligned} J_n(0) &= P\left(J_n(0)\exp(J_n(0))\right)P^{-1} = P(J_n(0))P^{-1}.P\exp(J_n(0))P^{-1} \\ &= P(J_n(0))P^{-1}\exp(PJ_n(0)P^{-1}) = \bar{N}\exp(\bar{N}), \end{aligned}$$
avec $\bar{N} = PJ_n(0)P^{-1}$.

8/
- D'après la première partie, il existe $\mu \in D$, μ non nul tel que $\lambda = \mu e^\mu$. Or $\mu = Re^{i\theta}$ avec $\theta \in]0,\pi[$ donc $\mu \notin \mathbb{R}$ donc $\mu \neq -1$.
- On a
$$J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} = (\mu I_n + J_n(0))e^{\mu I_n + J_n(0)} = (\mu I_n + J_n(0))e^{\mu I_n}e^{J_n(0)} = (\mu I_n + J_n(0))(e^\mu I_n)e^{J_n(0)}$$
On a $e^{J_n(0)} = I_n + J_n(0) + \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}\frac{J_n(0)^k}{k!}$ puisque $J_n(0)^n = 0$. On note $Q = \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}\frac{X^k}{k!}$ et $R = \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}\frac{X^{k-2}}{k!}$, ainsi $Q = X^2R$. Cela donne
$$\begin{aligned} J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} &= e^\mu(\mu I_n + J_n(0))(I_n + J_n(0) + Q(J_n(0))) \\ &= (\mu e^\mu)I_n + e^\mu(\mu+1)J_n(0) + e^\mu(J_n(0)^2 + (\mu I_n + J_n(0))Q(J_n(0))) \end{aligned}$$
ce qui donne l'expression souhaitée avec $p = e^\mu(1 + (\mu + X)R)$.

9/
- On note $A = (\mu+1)e^\mu J_n(0) + (J_n(0)^2 p(J_n(0)) = J_n(0)\left((\mu+1)e^\mu I_n + J_n(0)p(J_n(0))\right) = J_n(0)B$ où $B = (\mu+1)e^\mu I_n + J_n(0)p(J_n(0))$. La matrice B commute avec $J_n(0)$ puisque c'est un polynôme en $J_n(0)$. La matrice $J_n(0)p(J_n(0))$ est nilpotente donc semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle, si bien que B est semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale $(\mu+1)e^\mu \neq 0$. Ainsi la matrice B est inversible. On a alors $A^{n-1} = J_n(0)^{n-1}B^{n-1} \neq 0$ car B^{n-1} est inversible et $J_n(0)^{n-1}$ est non nulle, ainsi que $A^n = 0$. La matrice A est nilpotente d'indice n.

- On a donc $J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} = \lambda I_n + A$ avec A nilpotente d'indice n donc semblable à $J_n(0)$. Il existe P inversible telle que

$$J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} = \lambda I_n + P^{-1}J_n(0)P = P^{-1}(\lambda I_n + J_n(0))P$$

cela donne $J_n(\lambda) = P\left(J_n(\mu)e^{J_n(\mu)}\right)P^{-1} = Me^M$ avec $M = PJ_n(\mu)P^{-1}$ (en utilisant le même résultat que dans la question 7/ pour rentrer les matrices P et P^{-1} dans l'exponentielle).

III. Forme de Jordan d'une matrice nilpotente

Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'ordre p. On suppose dans un premier temps que $1 < p < n$.

10/ Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à N. On choisit $X \notin \ker u^{p-1}$. On montre de même que $(u^{p-1}(x),\dots,u(x),x)$ est une famille libre de $\mathbb{C}^n$. On peut la compléter pour former une base de $\mathbb{C}^n$. Dans cette base la matrice de u est

$$A = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & B \\ \hline O & C \end{array}\right)$$

11/
- La matrice est de détermiant 1. On remarque que $T_X T_{-X} = I_n$ par produits par blocs donc l'inverse de T_X est T_{-X}.
- On a

$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & X \\ \hline O & I_{n-p} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & B \\ \hline O & C \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_p & -X \\ \hline O & I_{n-p} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_pJ_p(0)I_p & B + XC - J_p(0)X \\ \hline O & I_{n-p}CI_{n-p} \end{array}\right)$$

On a bien $A' = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & Y \\ \hline O & C \end{array}\right)$ avec $Y = B + XC - J_p(0)X$.

12/ Si on note $X = \begin{pmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} \\ \vdots \\ X_{(p)} \end{pmatrix}$, alors on a $J_p(0)X = \begin{pmatrix} X_{(2)} \\ \vdots \\ X_{(p)} \\ (0) \end{pmatrix}$. On regarde alors le bloc $Y = B + XC - J_p(0)X$. La matrice XC a pour ligne i : $X_{(i)}C$ et la ligne i de Y est alors $B_{(i)} + X_{(i)}C - X_{(i+1)}$ pour i allant de 1 à $p-1$ (toutes sauf la dernière). Pour avoir toutes les lignes de Y nulles sauf éventuellement la dernière, on construit la matrice X ligne par ligne avec la relation $X_{(i+1)} = B_{(i)} + X_{(i)}C$, la première ligne $X_{(1)}$ étant quelconque (par exemple nulle). On a alors, pour tout $i \in [\![1\,;p-1]\!]$, $Y_{(i)} = 0$ et $Y_{(p)} = B_{(p)} + X_{(p)}C$.

13/
- La matrice A' est semblable à A qui est semblable à N nilpotente d'indice p. On a donc $A'^p = 0$. De plus, le premier bloc de A'^{p-1} est $J_p(0)^{p-1} \neq 0$ donc A'^{p-1} n'est pas nulle. La matrice A' est donc nilpotente d'indice p.
- On note L la dernière ligne de Y : $Y = \begin{pmatrix} (0) \\ (0) \\ \vdots \\ L \end{pmatrix}$. On calcule pour commencer A'^2 :

$$A'^2 = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0)^2 & J_p(0)Y + YC \\ \hline O & C^2 \end{array}\right)$$

On examine le bloc $J_p(0)Y + YC$. On a $J_p(0)Y = \begin{pmatrix} (0) \\ (0) \\ \vdots \\ L \\ (0) \end{pmatrix}$ et $YC = \begin{pmatrix} (0) \\ (0) \\ \vdots \\ LC \end{pmatrix}$ donc

$$J_p(0)Y + YC = \begin{pmatrix} (0) \\ (0) \\ \vdots \\ L \\ LC \end{pmatrix}$$

Le calcul de A'^3 donne une même expression avec un bloc $(1,2)$ égal à $\begin{pmatrix} (0) \\ (0) \\ \vdots \\ L \\ LC \\ LC^2 \end{pmatrix}$ On conjecture alors que $A'^k = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0)^k & Y_k \\ \hline O & C^k \end{array}\right)$ où $Y_k = \begin{pmatrix} (0) \\ \vdots \\ L \\ LC \\ \vdots \\ LC^{k-1} \end{pmatrix}$. On le montre par « récurrence finie ». Le calcul de A'^p fait apparaître la ligne L toute seule en haut,d'où $L = 0$.

14/ On a montré que N est semblable à $A' = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & (0) \\ \hline O & C \end{array}\right)$. On a $A'^p = 0$ donc $C^p = 0$ donc C est encore nilpotente d'indice au plus p. On peut alors montrer le résultat demandé par récurrence sur la dimension de la matrice.

- Soit $\mathscr{P}(n)$: « toute matrice nilpotente de taille n est semblable à une matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & & (0) \\ & J_{p_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}$ ».
- pour $n = 1$: une matrice nilpotente de taille 1 est nulle donc le résultat est correct.
- supposons le résultat vrai jusqu'à un certain entier $n \geqslant 0$. Soit N une matrice nilpotente d'indice $p \geqslant 1$, de taille $n+1$. Si $p = n+1$, on a fini. Sinon la matrice N est semblable à une matrice $A = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & (0) \\ \hline O & C \end{array}\right)$ avec C nilpotente de taille $n+1-p \in [\![1\,;n]\!]$.
  On peut appliquer le résultat à C : il existe P telle que $C = PMP^{-1}$ avec M diagonale par blocs avec des blocs $J_k(0)$:
  $$C = P.\begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & & (0) \\ & J_{p_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}.P^{-1}.$$
  On considère alors la matrice $Q = \left(\begin{array}{c|c} I_p & (0) \\ \hline O & P \end{array}\right)$. Elle est inversible d'inverse $Q^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_p & (0) \\ \hline O & P^{-1} \end{array}\right)$, et on a
  $$Q^{-1}AQ = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & (0) \\ \hline O & P^{-1}CP \end{array}\right) = \begin{pmatrix} J_p(0) & & & (0) \\ & J_{p_1}(0) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}$$
  La matrice N est donc semblable à une matrice désirée.

IV. Représentation Ae^A dans $M_n(\mathbb{C})$

15/ voir cours

16/ A est semblable à une matrice B diagonale par blocs, de blocs $\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i$. Chaque matrice N_i est semblable à une matrice du type $M_i = \begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & & (0) \\ & J_{p_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & J_{p_{r_i}}(0) \end{pmatrix}$. La matrice $\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i$ s'écrit alors $P_i \begin{pmatrix} \lambda_i I_{p_1} + J_{p_1}(0) & & & (0) \\ & \lambda_i I_{p_2} + J_{p_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_i I_{p_{r_i}} + J_{p_{r_i}}(0) \end{pmatrix} P_i^{-1}$.On considérant une matrice de passage diagonale par blocs avec les P_i sur la diagonale, la matrice B est semblable à une matrice diagonale par blocs dont tous les blocs sont sous la forme $\lambda I_k + J_k(0)$. Pour chacun de ces blocs, il existe une matrice X_k telle que $X_k e^{X_k} = \lambda I_k + J_k(0)$. la matrice A est donc semblable à une matrice

$$\begin{pmatrix} X_1 e^{X_1} & & & (0) \\ & X_2 e^{X_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & X_q e^{X_q} \end{pmatrix} = Xe^X$$

où X est la matrice diagonale par blocs de blocs $X_1, \ldots, X_q$. On a $A = R(Xe^X)R^{-1} = Ye^Y$ avec $Y = PXP^{-1}$ donc l'application $X \mapsto Xe^X$ est surjective dans $M_n(\mathbb{C})$.