Représentation matricielle Ae^A

Soit n un entier naturel non nul et $M_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à cœfficients complexes. On note I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{C})$. Une matrice N de $M_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente d'indice p* si p est le plus petit entier strictement positif pour lequel $N^p = 0$.

Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on appelle exponentielle de A, et on note $\exp(A)$ ou e^A, la matrice $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$. On admet que si deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{C})$ sont telles que $AB = BA$, on a $e^{A+B} = e^A e^B$. Enfin, on appelle *bloc de Jordan d'ordre n* associé au nombre complexe λ, la matrice

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Si n et p sont deux entiers naturels non nuls on note $M_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à cœfficients complexes comportant n lignes et p colonnes. On notera indifféremment $M_{n,n}(\mathbb{C})$ ou $M_n(\mathbb{C})$.

I. Préliminaire sur la représentation ze^z dans $\mathbb{C}$

1/ Soit r et R des nombres réels strictement positifs, α et θ des nombres réels. On note $\omega = re^{i\alpha}$ et $z = Re^{i\theta}$. Montrer que l'équation $ze^z = \omega$ équivalente au système :

$$\begin{cases} Re^{R\cos\theta} = r \\ R\sin\theta = \alpha - \theta \ (\text{ modulo } 2\pi) \end{cases}.$$

On choisit dorénavant le réel α dans l'intervalle $[2\pi, 4\pi[$. Soit alors φ l'application de $[0,\pi[$ dans $\mathbb{R}$ définie par la formule :

$$\varphi(\theta) = \frac{\alpha-\theta}{\sin\theta} e^{\left((\alpha-\theta)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}$$

2/ Déterminer les limites de $\varphi(\theta)$ lorsque $\theta \to 0^+$ et lorsque $\theta \to \pi^-$. Que peut-on déduire sur les solutions de l'équation $\varphi(\theta) = r$ pour $r > 0$ fixé.

Soit $D = \{Re^{i\theta}; R > 0; 0 < \theta < \pi\} \cup \{0\}$ et l'application de D dans $\mathbb{C}$ définie par $g(z) = ze^z$.

3/ Déduire de ce qui précède que g est surjective.

II. Représentation Ae^A d'un bloc de Jordan

Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice n.

4/ Montrer qu'il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $N^{n-1}X \neq 0$ et que la famille $(X, NX, \dots, N^{n-1}X)$ est libre.

5/ En déduire que N est semblable à $J_n(0)$.

6/ Montrer que $e^{J_n(0)}$ est inversible et que $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n.

7/ Montrer que si $P \in M_n(\mathbb{C})$ est inversible, on a $Pe^{J_n(0)}P^{-1} = e^{PJ_n(0)P^{-1}}$. En déduire qu'il existe $\overline{N} \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n(0) = \overline{N}e^{\overline{N}}$.

Soit λ un nombre complexe non nul.

8/ Justifier l'existence d'un nombre complexe $\mu \neq -1$ tel que $\lambda = \mu e^\mu$ et montrer que l'on peut écrire :

$$J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} = \lambda I_n + (\mu+1)e^\mu J_n(0) + (J_n(0))^2 p(J_n(0))$$

où p est un polynôme à cœfficients complexes qui dépend de μ.

9/ Montrer que $(\mu+1)e^\mu J_n(0) + (J_n(0)^2 p(J_n(0))$ est nilpotente d'indice n. En déduire qu'il existe $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n(\lambda) = Me^M$.

III. Forme de Jordan d'une matrice nilpotente

Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'ordre p. On suppose dans un premier temps que $1 < p < n$.

10/ Montrer qu'il existe $B \in M_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $C \in M_{n-p,n-p}(\mathbb{C})$ telles que N est semblable à la matrice par blocs suivante :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & B \\ \hline O & C \end{array}\right)$$

où O est la matrice nulle de $M_{n-p,p}(\mathbb{C})$.

Pour tout $X \in M_{p,n-p}(\mathbb{C})$, on définit la matrice par blocs T_X suivante :

$$T_X = \left(\begin{array}{c|c} I_p & X \\ \hline O & I_{n-p} \end{array}\right) \in M_n(\mathbb{C})$$

11/ Montrer que T_X est inversible et calculer son inverse. Vérifier que $A' = T_X A T_X^{-1}$ est de la forme :

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & Y \\ \hline O & Z \end{array}\right)$$

où l'on explicitera les matrices $Y \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $Z \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{C})$.

12/ Montrer que dans l'écriture de A' de la question précédente, on peut choisir $X \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ de telle sorte que toutes lignes de Y, à l'exception éventuelle de la dernière, soient nulles. (On pourra noter $X_{(i)}$ la ième ligne de X pour $i \in \{1, \dots, p\}$ et étudier l'effet sur les lignes de X de la multiplication par $J_p(0)$ dans le produit $J_p(0)X$.)

13/ Justifier que A' est nilpotente d'indice p. En déduire que si la matrice X est choisie comme dans la question précédente, la matrice Y est nulle. (On pourra raisonner par l'absurde en étudiant l'effet des endomorphismes associés aux puissances de A' sur les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.)

14/ En déduire que lorsque $1 \leq p \leq n$, la matrice nilpotente N est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & & (0) \\ & J_{p_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}$$

où r et $p_1, \dots, p_r$ désignent des entiers naturels non nuls.

IV. Représentation Ae^A dans $M_n(\mathbb{C})$

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ses valeurs propres complexes distinctes, d'ordre de multiplicité respectifs $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ dans le polynôme caractéristique de A. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est A et F_i le sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ définie par $F_i = \ker((f - \lambda_i)^{\alpha_i})$ pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$.

15/ Montrer que l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est la somme directe des espaces F_i. En considérant une base de $\mathbb{C}^n$ adaptée à cette somme directe, montrer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs da la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & & & (0) \\ & \lambda_1 I_{\alpha_2} + N_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_s I_{\alpha_s} + N_s \end{pmatrix}$$

où $N_1, \dots, N_s$ sont des matrices nilpotentes.

16/ Montrer que l'application $A \mapsto Ae^A$ de $M_n(\mathbb{C})$ dans lui même est surjective.

FIN DU PROBLÈME