PROBLÈME I - CCINP 2019

Partie I - Étude de quelques exemples

Q 1. Soient A et B deux matrices semblables et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}BP$. On a alors

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P^{-1}BP) = \mathrm{tr}(BPP^{-1}) = \mathrm{tr}(B)$$

et

$$\det(P^{-1}BP) = \det(P^{-1})\det B \det P = \det B . \frac{\det P}{\det P} = \det B,$$

puisque P est inversible et ainsi $\det P^{-1} = \dfrac{1}{\det B}$. On a enfin, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda I_n - P^{-1}BP) = \det\left(P^{-1}(\lambda I_n - B)P\right) = \det(\lambda I_n - B) = \chi_B(\lambda).$$

L'égalité des polynômes caractéristiques redonne l'égalité des traces et des déterminants (coefficient de degré 0 et $n-1$ au signe près).

Q 2. On a

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

et le calcul de χ_B donne le même polynôme caractéristique. On a alors

$$\mathrm{rg}\,(A-2I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

donc l'espace propre associé à la valeur propre 2 pour A est de dimension 2, c'est-à-dire la multiplicité de la racine dans χ_A. Puisque la racine 1 est simple, son espace propre est de dimension 1. La matrice A est diagonalisable et semblable à la matrice diagonale de diagonale $(1,2,2)$. Concernant B, on a

$$\mathrm{rg}\,(B-2I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

et l'espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension $1 < 2$. La matrice B n'est pas diagonalisable donc n'est pas semblable à A.

On aurrait tout simplement pu dire que $\mathrm{rg}\,(A-2I_3) \neq \mathrm{rg}\,(B-2I_3)$ alors que si A et semblable à B alors $A-2I_3$ est semblable à $B-2I_3$ et ces deux matrices seraient de même rang.

Le spectre de A et de B est $\{1,2\}$. Puisque A est diagonalisable, le polynôme minimal de A est $(X-1)(X-2)$. Le polynôme minimal de B divise son polynôme caractéristique, admet 1 et 2 comme racine et n'est pas à racines simples (sinon B est diagonalisable). Ainsi le polynôme minimal de B est $(X-1)(X-2)^2$.

Q 3. On teste les deux méthodes proposées :

- avec les notations de l'énoncé, on a $u(e_1) = e_2 + 2e_3$. la position du terme 2 nous incinte à mettre ce vecteur e_1 en seconde position dans la nouvelle base et laisser e_3 à sa position. On considère alors la base (e_1', e_2', e_3') où $e_1' = e_2$, $e_2' = e_1$ et $e_3' = e_3$. On a alors $u(e_1') = u(e_2) = e_1 + e_3 = e_2' + e_3'$, $u(e_2') = u(e_1) = e_2 + 3e_3 = e_1' + 2e_3'$ et $u(e_3') = u(e_3) = e_1 = e_2'$. La matrice dans cette nouvelle base est bien B.
- On détermine le polynôme caractéristique de A (sinon on ne voit pas trop à quoi pourrait servir l'indication) :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ -2 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = -(1+2\lambda) + \lambda(\lambda^2-1)$$

  ce qui donne $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 1$. On montre de même que $\chi_B = \chi_A$ (si si, il faut faire les calculs). Si on montre que $X^3 - 3X - 1$ admet trois racines réelles distinctes alors A et B seront diagonales et donc semblable à la même matrice diagonale. Pour cela on étudie

$$f : x \mapsto x^3 - 3x - 1$$

  La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. On a $f(-1) = 1$ et $f(1) = -3$. On dessine un tableau de variation (croissante, décroissante, croissante) avec ces valeurs et les limites aux bornes. Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de $\alpha \in]-\infty, -1[$, $\beta \in]-1, 1[$ et $\gamma > 1$ racines de f.

Q 4. On a $\dim\ker u = n-1$. Soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base du noyau de u, qu'on complète avec un vecteur e_n. On a alors $u(e_1) = \ldots = u(e_{n-1}) = 0$ et $u(e_n)$ qui s'écrit sous la forme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k e_k$.
La matrice de u dans cette nouvelle base est la matrice U.

Q 5. On peut effectuer le produit matriciel. Il est plus simple de calculer u^2 sur les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$. On a toujours $u^2(e_i) = 0$ si $i \in [\![1; n-1]\!]$ et $u^2(e_n) = u\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k u(e_k) = a_n u(e_n)$. On a alors $U^2 = a_n U$. Puisque $U^2 \neq 0$, on a $a_n \neq 0$. Le polynôme $X^2 - a_n X = X(X-a_n)$ est annulateur, scindé à racines simples pour u (ou U) donc u est diagonalisable.

Q 6. On peut le faire par essais sur une matrice de taille 2. On peut également chercher une telle matrice, non diagonale, de sorte que le polynôme caractéristique admette une racine double :

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \chi_A = X^2 - (a+c)X + ac - b^2$$

et son discriminant est $(a+c)^2 - 4(ac-b^2) = (a-c)^2 + 4b^2$. On peut prendre $a=1, b=i$ et $c=-1$ soit $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est X^2 et la matrice n'est pas semblable à la matrice nulle puisqu'elle n'est pas nulle.

Q 7. Les colonnes 1 et 3 sont identiques, comme les colonnes 2 et 4. La matrice est au plus de rang 2. Les colonnes 1 et 2 sont non nulles. Si elles étaient liées, il existerait $k \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à $\alpha = k\beta$ et $\beta = k\alpha$. On aurait alors $\alpha = k^2\alpha$ et $k^2 = 1$ puisque $\alpha \neq 0$. Cela donne $\beta = \pm\alpha$ ce qui est exclu. Finalement $\operatorname{rg} A = 2$. Cela donne 0 valeur propre de A avec un espace propre associé de dimension 2.

On vérifie facilement que si on note $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $Av_3 = 2(\alpha+\beta)v_3$ et avec $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, on a $Av_4 = 2(\alpha-\beta)v_4$. Ces deux vecteurs sont donc vecteurs propres pour deux valeurs propres distinctes et non nulles.

Il reste à déterminer l'espace propre associé à la valeur propre 0. On peut résoudre $AX = 0$ ou chercher des vecteurs qui conviennent. Par exemple $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (cela correspond à dire que les vecteurs $C_1 - C_3$ et $C_2 - C_4$ sont nuls si C_i est la colonne i de A).

On a finalement 4 vecteurs propres : les deux premiers qui forment une base de $E_0(A)$ et les autres qui sont vecteurs propres pour deux **autres** valeurs propres. Puisque les espaces propres sont en somme directe, on a ainsi une base de vecteurs propres.

Q 8. Plusieurs options :

- on note u l'endomorphisme canoniquement associé à A et (e_1, e_2) la base canonique de R^2. On a $u(e_1) = \lambda e_1$ et $u(e_2) = \lambda e_2 + ae_1$. On calcule dans la base (e_1', e_2) où $e_1' = \mu e_1$. On a toujours $u(e_1') = \lambda e_1'$ et $u(e_2) = \lambda e_1 + ae_1 = \lambda e_1 + \frac{a}{\mu}e_1'$. Avec $\mu = \frac{a}{b}$, la matrice de u dans la nouvelles base est B.
- On cherche P une matrice de changement de base triangulaire supérieure afin que $P^{-1}AP = B$ (ou une matrice inversible P triangulaire supérieure telle que $AP = PB$)

Démonstration d'un résultat

Q 9. On a $PB = AP$ soit $RB + iSB = AR + iAS$ avec RB, SB, AR et AS à coefficients réels. En prenant coefficients par coefficients les parties réelles et imaginaires, on obtient $RB = AR$ et $SB = AS$.

Q 10. Chaque coeffient de $R + xS$ est un polynôme de degré au plus 1 en x. la formule générale du déterminant permet d'écrire $\det(R + xS)$ comme somme de produits de n de ces coefficients donc comme une somme de polynôme en x de degré au plus n (à coefficients dans $\mathbb{R}$). On a donc $x \mapsto \det(R + xS)$ qui est polynômiale en x, de degré au plus n. De plus, pour $x = i$, $\det(R + iS) = \det P \neq 0$ donc la fonction n'est pas identiquement nulle. Il existe donc $Q \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que, pour tout $x \in \mathbb{C}$, $\det(R + xS) = Q(x)$. Puisque Q n'est pas le polynôme nul, il admet un nombre fini de racines. Il existe donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $Q(x) \neq 0$ et ainsi $R + xS$ inversible.

Q 11. Avec $\tilde{P} = R + xS \in M_n(\mathbb{R})$ (le x précédent), on a $\tilde{P}$ inversible et avec $RB = AR$ et $RS = SR$, on a $(R + xS)B = A(R + xS)$. On obtient $\tilde{P}B = A\tilde{P}$ et ainsi $A = \tilde{P}^{-1}B\tilde{P}$. Les matrices sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.

Q 12. On a $X^3 + X = X(X^2+1) = X(X-i)(X+i)$. Toute matrice A qui admet ce polynôme caractéristique est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et semblable à la matrice diagonale de diagonale $(0, i, -i)$. On a également $\chi_B = X(X^2+1)$. Donc B et A sont semblables sur C donc sur $\mathbb{R}$.

Partie III

On note A et B deux matrices qui ont même polynôme caractéristique χ et minimal μ.

Q 13. En dimension 2, on n'a que deux possibilités pour le polynôme minimal :

- μ est de degré 1, c'est-à-dire $\mu = X - a$. Alors A et B sont les matrices aI_2. Elles sont égales et semblables.
- μ est de degré 2 - c'est aussi le polynôme caractéristique. On a 3 cas :
  - $\mu = \chi$ a deux racines réelles distinctes α et β. Dans ce cas les deux matrices sont semblables sur $\mathbb{R}$ à la même matrice diagonale donc elles sont semblables
  - $\mu = \chi$ a deux racines complexes conjuguées distinctes. Les matrices sont semblables sur $\mathbb{C}$ à une même matrice diagonale donc, par transitivité, semblables sur $\mathbb{C}$. D'après la partie précédente, elles sont semblables sur $\mathbb{R}$,
  - $\mu = \chi = (X-\lambda)^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors A et B sont trigonalisables semblables respectivement à des matrices du même type que dans Q15. Elles sont alors semblables.

Q 14. Comme souvent, les contre-exemples sont difficiles à trouver... les matrices ne peuvent pas être diagonalisables donc μ ne peut pas être à racines simples. On a le choix entre 1 et 2 valeurs propres. On essaie au plus simple... une seule valeur propre, par exemple 0 (on peut toujours considérer $A-\lambda I_4$ pour s'y ramener). On a $\chi = X^4$ et on cherche $\mu = X^2$ ou X^3... On a par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui vérifient toutes les deux $A^2 = B^2 = 0$ - X^2 est le polynôme minimal - avec un polynôme caractéristique X^4. Les matrices n'ont pas le même rang donc ne sont pas semblables.

PROBLÈME II - CCINP 2021 - Théorème de décomposition de Dunford

Partie I - Quelques exemples

Q 1.
- Lorsque A est diagonalisable alors $D = A$ et $N = 0$ conviennent : on a bien N nilpotente et D et N commutent,
- lorsque A est nilpotente alors de même les matrices $D = 0$ et $N = A$ conviennent
- si A est trigonalisable alors A est semblable a une matrice triangulaire supérieure T. On a alors $\chi_A = \chi_T$ et $\chi_T = \prod_{k=1}^{n}(X - t_{ii})$ si $t_{11}, \ldots, t_{nn}$ sont les coefficients diagonaux de T. Le polynôme caractéristique est scindé donc les hypothèses peuvent s'appliquer.
- On a bien $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalisable car diagonale, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente car $D^2 = 0$. On a $DN = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $ND = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc N et D ne commutent pas et le couple n'est pas la décomposition de Dunford de la matrice donnée.

Q 2. Il suffit que χ_A ne soit pas scindé (on ne pourra pas avoir $\chi_A = \chi_D$), par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique est $X^2 = 1$.

Q 3. On calcule (vraiment) le polynôme caractéristique de A. On obtient $(X+1)^3$. Puisqu'il est scindé A admet une décomposition de Dunford. La matrice D de cette décomposition vérifie $\chi_D = \chi_A = (X+1)^3$ avec D diagonalisable donc D est semblable à $-I_3$. La seule matrice semblable à $-I_3$ est $-I_3$. On a donc $D = -I_3$. On en déduit que $N = A + I_3$. On a bien D diagonalisable, $DN = ND$, $A = D + N$ - on pourrait vérifier que N est nilpotente mais si on a admis le théorème, autant l'utiliser pour avoir l'existence de la décomposition; le calcul précédent donne l'unique décomposition possible donc la bonne (sinon $N^2 = 0$).

Q 4. **Application** : On a $A + D + N$ avec $DN = ND$ donc $\exp(A) = \exp(D).\exp(N)$. On a $\exp(N) = I_3 + N$ (le calcul de N^2 est finalement nécessaire si on ne l'a pas fait). On a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-I_3)^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right).I_3$$

de limite $e^{-1}I_3$ (l'application linéaire $x \mapsto xI_3$ est continue sur $\mathbb{R}$). On en déduit que $\exp(A) = e^{-1}(I_3 + N)$ avec $I_3 + N = A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Q 5. Si on note $Q = X(X-1)$ alors $Q(A^2) = A^2(A^2 - I_3) = A^2(A - I_3)(A + I_3)$ car A et I_3 commutent. On a a bien $Q(A^2) = 0$. Puisque Q est scindé à racines simples, alors A^2 est diagonalisable. On calcule $N^2 = (A - A^2)^2 = (A(I_3 - A))^2 = A^2(I_3 - A)^2 = (A - I_3)\left(A^2(A - I_3)\right) = 0$. On a donc $N^2 = 0$. De plus N et D commutent car elles sont polynomiales en A. On a donc $(A^2, A - A^2)$ qui est la décomposition de Dunford de A.

Partie II - Un exemple par deux méthodes

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A. On notera Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

Q 6. On détermine le polynôme caractéristique de A pour trouver $\chi_A = (X-1)(X-2)^2$. On détermine l'espace propre associé à la valeur 2 (en fait le rang de $A - 2I_2$ suffit pour justifier que $\dim\ker(A - 2I_3) = 3 - \text{rg}\,(A - 2I_3) = 1 \neq 2$) : on trouve $\ker(A - 2I_3) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. La matrice n'est pas diagonalisable.
Puisque $\chi_A = \chi_u$ est annulateur de u et que $(X-1)$ et $(X-2)^2$ sont premiers entre eux (pas de racine complexe commune), on a, par le lemme de décomposition des noyaux,

$$\mathbb{R}^3 = \ker(u - \text{Id}) \circ (u - 2\text{Id})^2 = \ker(u - \text{Id}) \oplus \ker(u - 2\text{Id})^2.$$

Q 7. On a déterminé $e_2 = (1,1,0)$. On résout $AX = X$ pour obtenir $e_1 = (0,1,1)$. On calcule $(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui permet d'obtenir $\ker(u - 2\text{Id})^2$ comme plan d'équation $x = y$.
Le vecteur $e_3 = (0,0,1)$ permet de compléter e_2 en une base de $\ker(u - 2\text{id})^2$.
On a $u(e_3) = 2e_3 + e_2$, ainsi la matrice de u dans la nouvelle base (e_1, e_2, e_3) est $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On a également une matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ telle que $P^{-1}AP = B$.

Q 8. On note $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$. Par produit par blocs, on vérifie que $DN = ND = 2N$. On a également $N^2 = 0$ et D diagonale. Ainsi D et N sont les matrices de la décomposition de Dunford de B. On a alors $A = PBP^{-1} = (PDP^{-1}) + (PNP^{-1})$. Si on note $D' = PDP^{-1}$ et $N' = PNP^{-1}$, on a bien $A = D' + N'$, D' diagonalisable car semblable à D, $N'^2 = 0$ et $D'N' = N'D' = P(ND)P^{-1} = P(DN)P^{-1}$. Il reste à effectuer les calculs. On trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, N' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q 9. On peut écrire
$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X-2}+\frac{c}{(X-2)^2}$$
On trouve facilement $a=1$, $c=1$ et en évaluant par exemple en 0, $b=-1$, ce qui donne
$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2}=\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X-2}+\frac{1}{(X-2)^2}$$
en multipliant par $(X-1)(X-2)^2$, on obtient
$$1=1.(X-2)^2+(X-1)\left(-(X-2)+1\right)=(X-2)^2-(X-3)(X-1).$$
donc le résultat avec $V(X)=1$ et $U(X)=-X+3$.

Q 10.
- En évaluant la relation $U(X).(X-1)+V(x)(X-2)^2=1$ en u, on obtient $p+q=\mathrm{Id}$ et $p(x)+q(x)=x$.
- soit $x\in\ker(u-\mathrm{Id})$. On a $q(x)=0$ donc $p(x)=x$
- soit $x\in\ker(u-2\mathrm{Id})^2$. On a $p(x)=0$ donc $q(x)=x$
- si $x=x_1+x_2$ avec $x_1\in\ker(u-\mathrm{Id})$ et $x_2\in\ker(u-2\mathrm{Id})^2$, alors $p(x)=x_1$ et $q(x)=x_2$. Les deux applications p et q sont les deux projecteurs associés à la décomposition $E=\ker(u-\mathrm{Id})\oplus\ker(u-2\mathrm{Id})^2$.

Q 11.
- puisque $e_1\in\ker(u-\mathrm{id})$, on a $p(e_1)=e_1$ et $q(e_1)=0$ donc $d(e_1)=e_1$,
- puisque $e_2,e_3\in\ker(u-2\mathrm{id})^2$, $p(e_2)=p(e_3)=0$ et $q(e_2)=2e_2$, $q(e_3)=2e_3$ donc $d(e_2)=2e_2$ et $d(e_3)=2e_3$.
- La matrice de d dans la base (e_1,e_2,e_3) est la matrice diagonale de diagonale $(1,2,2)$.

On calcule $R=(X-2)^2+2(X-1)(3-X)=-X^2+4X-2$ et $D=R(A)=-A^2+4A-2I_3$. On note $N=A-D=A^2-3A+2I_3$. On a alors
$$A^2=\begin{pmatrix}8&4&4\\7&3&4\\3&3&4\end{pmatrix},\text{ et on retrouve }D=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix},N=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

Q 12.
- Soit $x\in E_{\lambda_i}(u)$: on a $u(x)=\lambda_i x$. On a alors $v(u(x))=u(v(x))=\lambda_i v(x)$ donc $v(x)\in E_{\lambda_i}(u)$. Le sous-espace propre est stable par v.
- Soit $i\in[\![1\,;p]\!]$. On note v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$ (puisque l'espace est stable par v). Cet endomorphisme est toujours diagonalisable. Il existe donc une base de $E_{\lambda_i}(u)$ de vecteurs propres pour v_i. Ces vecteurs sont des vecteurs propres pour v et également pour u. En concaténant ces bases pour chaque espace propre de $E_{\lambda_i}(u)$, on obtient une base de E puisque les sous-espaces propres de u sont supplémentaires. On a donc construit une base de vecteurs propres communs à u et v.

Q 13. D'après la question précédente, il existe P inversible telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont toutes deux diagonales. Alors $P^{-1}(A-B)P$ est encore diagonale donc $A-B$ est diagonalisable.

Q 14. On suppose que $A^p=0$ et $B^q=0$. On a alors
$$(A-B)^{p+q}=\sum_{k=0}^{p+q}\binom{p+q}{k}A^k(-B)p+q-k$$
Si $k\in[\![p\,;p+q]\!]$ alors $A^k=0$. Si $0\leqslant k<p$, alors $p+q-k>q$ donc $B^{p+q-k}=0$. Tous les termes de la somme sont nuls donc $(A-B)^{p+q}=0$. La matrice est nilpotente.
remarque : on aurait pu se contenter de $(A-B)^{p+q-1}$.

Q 15. Soit A une telle matrice : $A=PDP^{-1}$ avec D diagonale. Si $A^k=0$ alors $D^k=0$. Or si D est la matrice de diagonale $d_1,\dots,d_n$ alors D^k est celle de diagonale $d_1^k,\dots,d_n^k$. Tous les d_i sont nuls et $A=0$.

Q 16. On suppose avoir deux tels couples $A=D_1+N_1=D_2+N_2$. On a $D_1-D_2=N_2-N_1$. Puisque toutes les matrices sont des polynômes en A, elles commutent. On a donc D_1-D_2 diagonalisable, N_2-N_1 nilpotente et ainsi $D_1-D_2=N_2-N_1=0$. Cela donne l'unicité de la décomposition.

Partie IV - Non continuité de l'application $A\mapsto D$

Q 17. $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$ sont diagonalisables (polynôme caractéristique scindé à racines simples) mais pas leur différence. Si on veut un exemple de taille n on prend des matrices par blocs avec ces deux matrices et une matrice diagonale de coefficients $2,3,\dots,n$ (ainsi les polynômes caractéristiques sont scindés à racines simples ce qui garantit sans effort la diagonalisabilité).

Q 18. voir cours - le principe : on trigonalise $A=PTP^{-1}$ et en ajoutant $\frac{1}{p}J$ à T avec J la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1,2,\dots,n)$ on vérifie que $T+\frac{1}{p}J$ est à éléments diagonaux deux à deux distincts lorsque p est suffisamment grand - ce qui en fait une matrice diagonalisable. La suite $A_p=P(T+\frac{1}{p}J)P^{-1}$ converge vers A et c'est une suite de matrices diagonalisables à partir d'un certain rang.

Q 19. L'application est bien définie puisque le couple est unique. Si A est diagonalisable alors $\varphi(A)=A$. Donc φ est l'identité sur $\mathscr{D}$. Si φ était continue sur $M_n(\mathbb{C})$ alors elle serait l'identité sur $M_n(\mathbb{C})$: deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales. L'application n'est donc pas continue - sinon toute matrice serait diagonalisable ($A=\varphi(A)=D$ avec les notations de l'énoncé) et on connaît quelques matrices nilpotentes non nulles.