PROBLÈME I - CCINP 2019

On s'intéresse dans ce problème, à travers divers exemples, à quelques méthodes pour prouver que deux matrices sont semblables.

Par la suite, n désigne un entier naturel, $n \geqslant 2$.

Partie I - Étude de quelques exemples

Q 1. Justifier que deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.

Q 2. On donne deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que ces deux matrices ont la même trace, le même déterminant, le même rang et le même polynôme caractéristique.

Ces deux matrices sont-elles semblables? (on pourra vérifier que l'une de ces matrices est diagonalisable). Ont-elles le même polynôme minimal?

Q 3. On donne deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Établir que ces deux matrices sont semblables par les deux méthodes suivantes :

- première méthode : en utilisant u l'endomorphisme associé à A dans une base (e_1, e_2, e_3) d'un espace vectoriel E et en cherchant, sans calculs, une nouvelle base de E;
- deuxième méthode : en prouvant que le polynôme $X^3 - 3X - 1$ admet trois racines réelles distinctes (que l'on ne cherchera pas à déterminer) notées α, β et γ.

Q 4. Démontrer que toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 est semblable à une matrice :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & . & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

On pourra utiliser l'endomorphisme u canoniquement associé à la matrice A.

Q 5. **Application :** soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E de rang 1 vérifiant $u \circ u \neq 0$, démontrer que u est diagonalisable. On pourra calculer U^2.

Q 6. Démontrer qu'une matrice symétrique à coefficients complexes n'est pas nécessairement diagonalisable.

Q 7. On donne une matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ où α et β sont deux nombres complexes non nuls, différents et non opposés.

- Déterminer le rang de la matrice A et en déduire que 0 est valeur propre de A.
- Justifier que $2(\alpha + \beta)$ et $2(\alpha - \beta)$ sont aussi valeurs propres de A.
- Préciser une base de vecteurs propres de A.

Dans cette question, il est déconseillé de calculer le polynôme caractéristique de la matrice A.

Q 8. Démontrer que quels que soient les réels non nuls a, b et le réel λ, les matrices $A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont semblables.

Partie II - Démonstration d'un résultat

On se propose de démontrer que deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice P inversible à coefficients complexes telle que $B = P^{-1}AP$. Écrivons $P = R + iS$ où R et S sont deux matrices à coefficients réels.

Q 9. Démontrer que $RB = AR$ et $SB = AS$.

Q 10. Justifier que la fonction $x \mapsto \det(R + xS)$ est une fonction polynomiale non identiquement nulle et en déduire qu'il existe un réel x tel que la matrice $R + xS$ soit inversible.

Q 11. Conclure que les matrices A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 12. **Application :** démontrer que toute matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique $X^3 + X$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie III

On s'intéresse dans cette question à la proposition P_n : « Deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ayant à la fois le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ».

Q 13. En étudiant les différentes valeurs possibles pour le polynôme caractéristique et le même polynôme minimal, démontrer que la proposition P_n est vraie pour $n = 2$. On admet qu'elle l'est également pour $n = 3$.

Q 14. Démontrer que la proposition P_n est fausse pour $n = 4$. On pourra fournir deux matrices composées uniquement de 0 et de 1 .

PROBLÈME II - CCINP 2021 - Théorème de décomposition de Dunford

On admet le théorème suivant que l'on pourra utiliser librement :

Si A est une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple (D,N) de matrices de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant les quatre propriétés :

(1) $A = D + N$;

(2) D est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$ (pas nécessairement diagonale) ;

(3) N est nilpotente ;

(4) $DN = ND$.

De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$. Le couple (D,N) s'appelle la décomposition de Dunford de A.

Partie I - Quelques exemples

Q 1. Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ lorsque A est diagonalisable, puis lorsque la matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente.

Justifier qu'une matrice trigonalisable vérifie l'hypothèse du théorème, admettant ainsi une décomposition de Dunford.

Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$?

Q 2. Donner un exemple d'une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford dans $M_2(\mathbb{R})$.

Q 3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix}3 & 0 & 8\\ 3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -5\end{pmatrix}$.

Calculer son polynôme caractéristique χ_A, puis donner le couple (D,N) de la décomposition de Dunford de A (on utilisera le fait que $\chi_A = \chi_D$).

Q 4. **Application** : pour $A \in M_n(\mathbb{K}), \exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ est l'exponentielle de la matrice A.

Déduire de la question précédente l'exponentielle de la matrice A définie en **Q3**.

On pourra utiliser sans démonstration que si M et N sont deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent, $\exp(M+N) = (\exp M)(\exp N)$.

Q 5. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$. Justifier que le polynôme $X(X-1)$ est annulateur de la matrice A^2. Démontrer que le couple (D,N) de la décomposition de Dunford de la matrice A est donné par : $D = A^2$ et $N = A - A^2$.

Partie II - Un exemple par deux méthodes

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A. On notera Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

Q 6. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$? Démontrer qu'on a la somme directe : $\mathbb{R}^3 = \ker(u - \mathrm{Id}) \oplus \ker(u - 2\mathrm{Id})^2$.

Q 7. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que : $\ker(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\{e_1\}, \ker(u - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\{e_2\}$ et $\ker(u - 2\mathrm{Id})^2 = \mathrm{Vect}\{e_2, e_3\}$.

Écrire la matrice B de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

Q 8. Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice B et en déduire le couple (on calculera ces matrices) de la décomposition de Dunford de la matrice A.

Q 9. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{(X-1)(X-2)^2}$ et en déduire deux polynômes U et V tels que :

$$(X-1)U(X) + (X-2)^2 V(X) = 1 \text{ avec } \deg U < 2 \text{ et } \deg V < 1$$

Q 10. On pose les endomorphismes : $p = V(u) \circ (u - 2\mathrm{Id})^2$ et $q = U(u) \circ (u - \mathrm{Id})$.

Calculer $p(x) + q(x)$ pour tout x vecteur de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que p est le projecteur sur $\ker(u - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\ker(u - 2\mathrm{Id})^2$ et q est le projecteur sur $\ker(u - 2\mathrm{Id})^2$ parallèlement à $\ker(u - \mathrm{Id})$.

Q 11. On pose $d = p + 2q$. Écrire la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ (de la question Q7).

Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice A en exprimant D et N comme polynômes de la matrice A (sous forme développée).

Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

Q 12. Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et pour tout $1 \leq i \leq p, E_{\lambda_i}(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i.

Démontrer que tout sous-espace propre de u est stable par v. En déduire qu'il existe une base commune de diagonalisation pour u et v.

Pour tout $1 \leq i \leq p$, on pourra noter v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.

Q 13. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Démontrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable.

Q 14. Soient A et B deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent, démontrer que la matrice $A - B$ est nilpotente.

Q 15. Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui sont à la fois diagonalisables et nilpotentes.

Q 16. Dans cette question, on admet, pour toute matrice carrée A de $M_n(\mathbb{K})$ à polynôme caractéristique scindé, l'existence d'un couple (D, N) vérifiant les conditions (1), (2), (3), (4) et tel que D et N soient des polynômes en A. Établir l'unicité du couple (D, N) dans la décomposition de Dunford.

Partie IV - Non continuité de l'application $A \mapsto D$

Q 17. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui sont diagonalisables. $\mathscr{D}$ est-il un espace vectoriel ?

Si P est une matrice inversible de $M_n(\mathbb{C})$, justifier que l'application de $M_n(\mathbb{C})$ vers $M_n(\mathbb{C}), M \mapsto PMP^{-1}$ est continue.

Q 18. Démontrer que $\mathscr{D}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Q 19. Si (D, N) est le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A, on note φ l'application de $M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathscr{D}$ qui à la matrice A associe la matrice D. Justifier que φ est l'application identité sur $\mathscr{D}$ et en déduire que l'application φ n'est pas continue.