1 Calcul de $\sigma(1)$

1 ▷ Si $|x| \leqslant 1$ alors $\left|\dfrac{x^k}{k^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{k^2}$ de $\sum \dfrac{x^k}{k^2}$ converge. Si $|x|>1$, la série diverge grossièrement. La fonction σ est définie sur $[-1,1]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k : x \mapsto \dfrac{x^k}{x^2}$ est continue sur $[-1,1]$ et $|u_k(x)| \leqslant \dfrac{1}{k^2}$ donc $\sum u_k$ converge normalement sur $[-1,1]$ et σ est continue sur $[-1,1]$.

2 ▷ Avec une double intégration par parties, on obtient

$$\int_0^\pi \left(\alpha t^2 + \beta t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n(2\pi\alpha+\beta)-\beta}{n^2}$$

En choisissant $\beta = -1$ et $\alpha = \dfrac{1}{2\pi}$, on obtient,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi \left(\frac{1}{2\pi}t^2 - t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

On calcule, pour $t \in]0,\pi]$,

$$2\sin\left(\frac{t}{2}\right).\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \sum_{k=1}^n 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(kt) = \sum_{k=1}^n \left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right) = \sin\left(n+\frac{1}{2})\right)t - \sin\left(\frac{1}{2}t\right)$$

ce qui donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,\pi]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$.

3 ▷ le premier résultat a déjà été vu plusieurs fois... on écrit alors

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{1}{2\pi}t^2 - t\right)\cos(kt)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2\pi}t^2 - t\right)\left(\sum_{k=1}^n \cos(kt)\right)\mathrm{d}t$$

On note $g(t) = \dfrac{1}{2\pi}t^2 - t$. On a alors (l'intégrale est faussement impropre en 0) :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi \frac{g(t)}{2\sin(t/2)}\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^\pi g(t)\mathrm{d}t.$$

On note $\varphi(t) = \dfrac{g(t)}{2\sin(t/2)} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{t^2-2\pi t}{2\sin(t/2)} = \dfrac{t^2-2\pi t)}{4\pi\sin(t/2)}$ pour $t \in]0,\pi]$. On a

$$\int_0^{2\pi} g(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi^2}{3}$$

Si on montre que φ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, on obtiendra

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sigma(1) = 0 - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{6}.$$

La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$

- φ se prolonge par continuité en 0 : $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-2\pi t}{2\pi t} = -1$.
- φ' admet une limite finie en 0 :

$$\forall t \in]0,\pi], \varphi'(t) = \frac{(2t-2\pi)\sin(t/2) - (1/2)\left(t^2-2\pi t\right)\cos(t/2)}{4\pi\sin^2(t/2)} = \frac{4(t-\pi)\sin(t/2) - \left(t^2-2\pi t\right)\cos(t/2)}{8\pi\sin^2(t/2)}$$

On effectue un développement limité au voisinage de 0 du numérateur :

$$4(t-\pi)\sin(t/2) - \left(t^2-2\pi t\right)\cos(t/2) = 4t\left(t/2+o\left(t^2\right)\right) - 4\pi\left(t/2+o\left(t^2\right)\right) - t^2(1+o(t)) + 2\pi t(1+o(t)) = t^2 + o\left(t^2\right) \underset{t\to 0}{\sim} t^2$$

cela donne $\varphi'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2}{8\pi(t/2)^2} = \dfrac{1}{2\pi}$. Ainsi φ' admet une limite finie en 0

Tout ces résultats permettent de dire que la fonction φ, prolongée en 0 par la valeur -1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

2 Équivalents

4 ▷ Soit $h(t)=(\sin t)^x$. La fonction h est bien définie et continue sur $]0,\pi/2]$. Puisque $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$, on a, pour $x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(\sin t)^x}{t^x}=1$ et $(\sin t)^x \underset{t\to 0}{\sim} t^x$. La fonction h est donc intégrable sur $]0,\pi]$ si et seulement si $x>-1$ donc $x\in I$. Soit $\varepsilon>0$ et $x>-1$ (ainsi $x+1>0$)

$$\int_\varepsilon^{\pi/2}(\sin t)^{x+1}\sin t\,\mathrm{d}t=\left[-\cos t(\sin t)^{x+1}\right]_\varepsilon^{\pi/2}+(x+1)\int_\varepsilon^{\pi/2}(\sin t)^x\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\cos\varepsilon(\sin\varepsilon)^{x+1}+(x+1)\int_\varepsilon^{\pi/2}(\sin t)^x(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t.$$

Puisque $x+1>0$, lorsque ε tend vers 0, on obtient $f(x+2)=(x+1)(f(x)-f(x+2))$, ce qui donne $(x+2)f(x+2)=(x+1)f(x)$.

5 ▷ On applique le théorème de dérivation pour les intégrales à paramètre - en se plaçant sur un intervalle $[a,+\infty[$ avec $a>-1$ (le problème d'intégralité arrive pour $x=-1$). On note $h(x,t)=(\sin t)^x=\exp(x\ln\sin t)$.

- pour tout $x\geqslant a$, $x\mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,+\infty]$ avec $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)=(\ln\sin t)(\sin t)^x$ et $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)=(\ln\sin t)^2(\sin t)^x$,
- les fonctions $t\mapsto h(x,t)$, $t\mapsto\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ et $t\mapsto\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur $]0,\frac{\pi}{2}]$. De plus, pour tout $x\geqslant a$, $t\mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]0,\frac{\pi}{2}]$.
- puisque $\lim\limits_{t\to 0}\sin t=0$, on a $\sin t\underset{t\to 0}{\sim}t$ et $\ln(\sin t)\underset{t\to 0}{\sim}\ln t$. Ainsi $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\underset{t\to 0}{\sim}t^x\ln t$. Puisque $x\geqslant a>-1$, il existe $b\in]-1,a[$. Alors $t^x\ln t\underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^b)$ donc $t\mapsto\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $]0,\frac{\pi}{2}]$.
- Pour tout $x\geqslant a$ et $x\in]0,\frac{\pi}{2}]$,
$$\left|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right|=(\ln^2\sin t)(\sin t)^x\leqslant(\ln^2\sin t)(\sin t)^a=\varphi(t)$$
La fonction φ est continue sur $]0,\frac{\pi}{2}]$, $\varphi(t)\underset{t\to 0}{\sim}(\ln^2\sin t)t^a=\underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^b)$ si on choisit $b\in]-1,a[$. Elle est donc intégrable sur $]0,\frac{\pi}{2}]$.

On a toutes les hypothèses pour appliquer le théorème de dérivation. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>-1$ donc sur I et on obtient les deux premières dérivées en dérivant sous le signe somme. Notamment, puisque pour tout $t\in]0,\frac{\pi}{2}]$, $\ln\sin t\leqslant 0$, on obtient que f' est négative et f'' positive. La fonction f est décroissante et convexe sur I.

6 ▷ On réutilise la relation (1). On a, par continuité de f en 1, $\lim\limits_{x\to -1}(x+2)f(x+2)=f(1)=1$ ce qui donne $f(x)\underset{x\to -1}{\sim}\dfrac{1}{x}$.

7 ▷ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la relation (1) donne $(n+1)f(n)=(n+2)f(n+2)$. En multipliant par $f(n+1)$, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(n+1)f(n)f(n+1)=(n+2)f(n+1)f(n+2)$. La suite $((n+1)f(n)f(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante égalé à son premier terme $f(0)f(1)=\frac{\pi}{2}$. On a donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(n+1)f(n)f(n+1)=\frac{\pi}{2}$.
Par décroissance et positivité, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $f(n+1)^2\leqslant f(n)f(n+1)\leqslant f(n)^2$. Cela donne, de nouveau par positivité,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}}\leqslant f(n)\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Pour $x>0$ (par exemple), on a $\lfloor x\rfloor\leqslant x<\lfloor x\rfloor+1$. Si on note temporairement $n=\lfloor x\rfloor$, on a $f(n+1)\leqslant f(x)\leqslant f(n)$ et ainsi

$$\sqrt{\frac{\pi}{2(n+2)}}\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

ce qui donne

$$\forall x>0,\sqrt{\frac{\pi}{2(\lfloor x\rfloor+2)}}\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2\lfloor x\rfloor}}$$

chaque terme encadrant étant équivalent à $\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$ lorsque $x\to+\infty$, on en déduit que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$.

8 ▷ on fait un joli dessin avec tout ça...

3 Développement en série entière

9 ▷

- On note $g_n(t)=(\ln(\sin t))^n$ si $n\in\mathbb{N}$ et $t>0$. Les fonctions g_n sont continue sur $]0,\frac{\pi}{2}]$. Comme précédemment $g_n(t)\underset{t\to 0}{\sim}\ln^n t$ et $g_n(t)=\underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc g_n est intégrable sur $]0,\frac{\pi}{2}]$.
- En effectuant le changement de variable affine « $t=\frac{\pi}{2}-t$ » dans l'intégrale D_1, on obtient bien $D_1=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)\mathrm{d}t$.

10 ▷ On a $f'(0)=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\mathrm{d}t = D_1$. On a donc

$$2D_1=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\mathrm{d}t+\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t\cos t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\ln(\frac{1}{2}\sin 2t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin 2t)\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

On effectue le changement de variable linéaire « $t=2u$ » dans cette dernière intégrale. Cela donne

$$2D_1=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin u)\mathrm{d}u-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

Or $\int_0^{\pi}\ln(\sin u)\mathrm{d}u=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin u)\mathrm{d}u+\int_{\pi/2}^{\pi}\ln(\sin u)\mathrm{d}u$ et un changement affine $u=\pi-t$ dans la seconde intégrale permet de retrouver D_1. Ainsi $\int_0^{\pi}\ln\sin u\mathrm{d}u=2D_1$. Finalement , on

$$2D_1=\frac{1}{2}(2D_1)-\frac{\pi}{2}\ln 2 \text{ c'est-à-dire } D_1=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

On a $f'(1)=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)(\sin t)\mathrm{d}t$. On calcule cette intégrale par intégration par parties. Soit $\varepsilon\in]0,\pi/2]$,

$$\int_{\varepsilon}^{\pi/2}\ln(\sin t)(\sin t)\mathrm{d}t=[(-\cos t)\ln(\sin t)]_{\varepsilon}^{\pi/2}+\int_{\varepsilon}^{\pi/2}\frac{\cos^2 t}{\sin t}\mathrm{d}t=\cos\varepsilon\ln(\sin\varepsilon)+\int_{\varepsilon}^{\pi/2}\frac{\cos^2 t}{\sin t}\mathrm{d}t$$

On calcule cette dernière intégrale en effectuant un changement de variable $u=\cos t$ (l'application arccosinus est bijective et $\mathscr{C}^1$ de $[0,1[$ sur $]0,\pi/2]$) :

$$\int_{\varepsilon}^{\pi/2}\frac{\cos^2 t}{\sin t}\mathrm{d}t=\int_{\varepsilon}^{\pi/2}\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}(\sin t)\mathrm{d}t=\int_{\varepsilon}^{\pi/2}\frac{\cos^2 t}{1-\cos^2 t}(\sin t)\mathrm{d}t=-\int_{\cos\varepsilon}^{0}\frac{u^2}{1-u^2}\mathrm{d}u$$

on continue :

$$\int_0^{\cos\varepsilon}\frac{u^2-1+1}{1-u^2}\mathrm{d}u=-\cos\varepsilon+\frac{1}{2}\int_0^{\cos\varepsilon}\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\mathrm{d}u=-\cos\varepsilon+\frac{1}{2}\ln(1+\cos\varepsilon)-\frac{1}{2}\ln(1-\cos\varepsilon)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{\pi/2}\ln(\sin t)(\sin t)\mathrm{d}t &= \cos\varepsilon\ln(\sin\varepsilon)-\cos\varepsilon+\frac{1}{2}\ln(1+\cos\varepsilon)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\sin^2\varepsilon/2\right)\\ &= \cos\varepsilon\ln\left(2\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{\varepsilon}{2}\right)-\cos\varepsilon+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos\varepsilon}{2}-\ln(\sin\frac{\varepsilon}{2})\\ &= (\ln 2\cos\frac{\varepsilon}{2}-1)\cos\varepsilon+(\cos\varepsilon-1)\ln\sin\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

puisque $(\cos\varepsilon-1)\ln\sin\frac{\varepsilon}{2}\underset{\varepsilon\to 0}{\sim}-\frac{\varepsilon^2}{2}\ln(\frac{\varepsilon}{2})$, sa limite est nulle. Finalement on obtient $\boxed{f'(1)=\ln 2-1}$.

Remarque : on peut aussi intégrer $\sin t$ en $1-\cos t$ afin d'avoir directement des limites en 0 et ainsi obtenir

$$\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)(\sin t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t(\cos t-1)}{\sin t}\mathrm{d}t$$

et travailler sur cette intégrale (qui est bien convergente en 0) et qui donne des calculs un peu plus simples et rapides - si on y pense.

11 ▷ on ne voit pas trop quel changement de variable faire autre que $u=\ln(\sin t)$ sauf qu'il donne des valeurs dans $]-\infty,0]$. On prend plutôt $u=-\ln(\sin t)$ donc « $t=\arcsin e^{-u}$ ». L'application $u\mapsto\arcsin(e^{-u})$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ ce qui justifie le changement de variable. On obtient alors

$$D_n=\int_{+\infty}^{0}(-u)^n\frac{-e^{-u}}{\sqrt{1-(e^{-u})^2}}\mathrm{d}u=(-1)^n\int_0^{+\infty}\frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}}\mathrm{d}u.$$

On doit maintenant montrer que $J_n=\int_0^{+\infty}\frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}}\mathrm{d}u\underset{n\to+\infty}{\sim}n!$. On montre par récurrence (avec une intégration par parties) que $K_n=\int_0^{+\infty}\frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}}}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}u^n e^{-u}\mathrm{d}u=n!$. On doit donc montrer que la différence est négligeable devant $n!$.

$$J_n-K_n=\int_0^{+\infty}u^n\left(\frac{1}{\sqrt{e^{2u}-1}}-e^{-u}\right)\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}u^n e^{-u}\left(\frac{e^u-\sqrt{e^{2u}-1}}{\sqrt{e^{2u}-1}}\right)\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}u^n e^{-u}\left(\frac{1}{\left(e^u+\sqrt{e^{2u}-1}\right)\sqrt{e^{2u}-1}}\right)\mathrm{d}u$$

En utilisant la minoration $e^x \geqslant 1+x$ pour tout $x \geqslant 0$, on a $e^{2u}-1 \geqslant 2u$ si $u>0$. Cela permet de majorer :

$$0 \leqslant J_n - K_n \leqslant \int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\left(\frac{1}{e^{2u}-1}\right)\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\frac{1}{u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u^{n-1}e^{-u}\frac{1}{u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(n-1)!$$

Ainsi $0 \leqslant \frac{J_n}{n!} - 1 \leqslant \frac{1}{2n}$ et par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{J_n}{n!} = 1$. Cela donne $\boxed{(-1)^n D_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n!}$.

12 ▷ Si $t \in]0,\frac{\pi}{2}]$, $(\sin t)^x = \exp(x\ln\sin t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\ln\sin t)^n\frac{x^n}{n!}$. On note $h_n(t) = (\ln\sin t)^n\frac{x^n}{n!}$.

- la série de fonction $\sum h_n$ converge simplement sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ et sa somme (la fonction $t \mapsto (\sin t)^x$ est continue sur $]0,\frac{\pi}{2})$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n est intégrable sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ et

$$\int_0^{\pi/2} h_n(t)\mathrm{d}t = (-1)^n D_n\frac{|x|^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|^n$$

On a donc convergence de $\sum\int_0^{\pi/2}|h_n(t)|\mathrm{d}t$ si $|x|<1$.

Tout cela permet d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme qui donne

$$\forall x \in]-1,1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{D_n}{n!}x^n.$$

4 Convergence de suite de fonctions

13 ▷ si on note $m = \min(a,b)$, on a $a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x \geqslant m^2(\cos^2 x+\sin^2 x) = m^2 > 0$. La fonction $x \mapsto a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs strictement positives. Par composition, Ψ est également de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a de plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Psi'(x) = \frac{2(b^2-a^2)\sin x\cos x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{(b^2-a^2)\sin 2x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$$

Pour la série, il est plus avantageux de commencer la somme à 0 puisque $\sin(0)=0$: la série $\sum(\rho e^{2ix})^k$ converge absolument car $|\rho|<1$ (on a en effet $-\frac{a}{a+b} < \rho < \frac{b}{b+a}$ avec $\frac{a}{a+b}$ et $\frac{b}{a+b}$ dans $]0,1[$)

$$\begin{aligned}
4\sum_{k=0}^{+\infty}\rho^k\sin(2kx) &= \operatorname{Im}\left(4\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\rho e^{2ix}\right)^k\right) = 4\operatorname{Im}\left(\frac{1}{1-\rho e^{2ix}}\right) = \frac{4}{2i}\left(\frac{1}{1-\rho e^{2ix}} - \frac{1}{1-\rho e^{-2ix}}\right)\\
&= \frac{4}{2i}\rho\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{1-2\rho\cos(2x)+\rho^2} = 4\frac{\rho\sin(2x)}{1-2\rho\cos(2x)+\rho^2} = 4\frac{\rho\sin(2x)}{1-2\rho(2\cos^2 x-1)+\rho^2}\\
&= 4\frac{\rho\sin(2x)}{1+2\rho+\rho^2-4\rho\cos^2 x} = 4\frac{\rho\sin(2x)}{(1+\rho)^2-4\rho\cos^2 x} = 4\frac{b-a}{b+a}\frac{\sin(2x)}{\dfrac{4b^2}{(a+b)^2}-4\dfrac{b-a}{a+b}\cos^2 x}\\
&= \frac{(b-a)(b+a)\sin(2x)}{b^2-(b^2-a^2)\cos^2 x} = \frac{(b^2-a^2)\sin(2x)}{a^2\cos^2 x+b^2(1-\cos^2 x)} = \Psi'(x)
\end{aligned}$$

14 ▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Psi(x)-\Psi(0) = \int_0^x \Psi'(t)\mathrm{d}t$. Si on note $v_k(x) = \rho^k\sin(2kx)$, on a $|v_k(x)| \leqslant |\rho|^k$ donc $\sum v_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Cela permet de permuter somme et intégrale :

$$\Psi(x) - 2\ln a = 4\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\int_0^x\sin(2kt)\mathrm{d}t = 4\sum_{k=1}^{+\infty}\rho^k\frac{1-\cos(2kx)}{2k}$$

Toujours puisque $|\rho|<1$, les séries $\sum\frac{\cos(2kx)}{k}\rho^k$ et $\sum\frac{1}{k}\rho^k$ converge, ce qui permet de séparer la somme en deux :

$$\Psi(x) = 2\ln a + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\rho^k}{k} - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2kx)}{k}\rho^k = 2\ln a - 2\ln(1-\rho) - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2kx)}{k}\rho^k$$

et $\ln(1-\rho) = \ln\left(\frac{2a}{a+b}\right)$ donc $2\ln a - \ln(1-\rho) = 2\ln\frac{a+b}{2}$. Finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Psi(x) = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2kx)}{k}\rho^k.$$

15 ▷ On pourrait être tenté de faire apparaître une somme double et intégrer... mais là on déborde sérieusement du programme. On choisit de conserver l'un des $\Psi(x)$ et d'utiliser la somme pour le second :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Psi^2(x) = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\Psi(x) - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\Psi(x)\cos(2kx)}{k}\rho^k.$$

- on s'intéresse au premier terme. Avec $w_k(x) = \dfrac{\rho^k}{k}\cos(2kx)$, on a $|w_k| \leqslant |\rho|^k$ et $\sum w_k$ converge normalement sur $[0,\pi]$. Cela permet de permuter somme et intégrale (toutes les fonctions qui apparaissent sont continues)

$$\int_0^\pi \Psi(x)\mathrm{d}x = 2\pi\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\rho^k}{k}\int_0^\pi \cos(2kx)\mathrm{d}x$$

  et chacune des intégrales est nulle donc $\displaystyle\int_0^\pi \Psi(x)\mathrm{d}x = 2\pi\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$
- On fait de même avec $z_k(x) = \dfrac{\Psi(x)\cos(2kx)}{k}\rho^k$: on a $|z_k| \leqslant M|\rho|^k$ où M est un majorant de $|\Psi|$ sur $[0,\pi]$ (la fonction est continue). On peut donc écrire

$$\int_0^\pi \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\Psi(x)\cos(2kx)}{k}\rho^k\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\rho^k}{k}\int_0^\pi \Psi(x)\cos(2kx)\mathrm{d}x$$

  On s'intéresse aux intégrales :

$$\int_0^\pi \Psi(x)\cos(2kx)\mathrm{d}x = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^\pi \cos(2kx)\mathrm{d}x - 2\int_0^\pi\left(\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2px)\cos(2kx)}{k}\rho^k\right)\mathrm{d}x.$$

  On a de nouveau convergence normale de $\sum h_p(x)$ sur $[0,\pi]$ avec $h_p(x) = \dfrac{\cos(2px)\cos(2kx)}{k}\rho^k$, ce qui permet de permuter somme et intégrale. Il reste à calculer, pour $p,k \geqslant 1$

$$\int_0^\pi \cos(2px)\cos(2kx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(2(k+p)x) + \cos(2(k-p)x)\mathrm{d}x$$

  L'intégrale vaut 0 si $k \neq p$ et $\frac{\pi}{2}$ si $k = p$. Cela donne

$$\int_0^\pi \Psi(x)\cos(2kx)\mathrm{d}x = -2.\frac{\pi}{2}\frac{\rho^k}{k} = -\pi\frac{\rho^k}{k}$$

Toutes ces permutations permettent d'obtenir

$$\int_0^\pi \Psi^2(x)\mathrm{d}x = 2\pi\ln^2\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\rho^k}{k}\int_0^\pi \Psi(x)\cos(2kx)\mathrm{d}x = 2\pi\ln^2\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\rho^k}{k}\left(-\pi\frac{\rho^k}{k}\right)$$

c'est-à-dire

$$\int_0^\pi \Psi^2(x)\mathrm{d}x = 4\pi\ln^2\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2\pi\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\rho^{2k}}{k^2} = 4\pi\ln^2\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2\pi\sigma(\rho^2).$$

16 ▷ On a directement $\lim\limits_{n\to+\infty}\Psi_n(t) = \ln(\sin^2 t) = 2\ln(\sin t)$. On rappelle que

$$f''(0) = \int_0^{\pi/2}\ln^2(\sin t)\mathrm{d}t$$

On serait donc fortement dirigé vers la suite d'intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\Psi_n(t)^2\mathrm{d}t$ qui devrait converger vers $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 4\ln^2(\sin t)\mathrm{d}t = 4f''(0)$.

On cherche donc à étudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\Psi_n(t)^2\mathrm{d}t$

- la suite de fonctions continues sur $]0,\pi/2]$, Ψ_n^2, converge simplement sur $]0,\pi/2]$ vers la fonction $g : t \mapsto 4\ln^2(\sin t)$
- la fonction g est continue sur $]0,\pi/2]$
- on doit dominer indépendamment de $n \geqslant 1$. On a $a_n^2\cos^2 t + b_n^2\sin^2 t \leqslant 1$ et $a_n^2\cos^2 t + b_n^2\sin^2 t \geqslant b_n^2\sin^2 t \geqslant b_1^2\sin^2 t = \frac{1}{4}\sin^2 t$. Cela donne

$$\ln\left(\frac{1}{4}\sin^2 t\right) \leqslant \Psi_n(t) \leqslant 0$$

et $0 \leqslant \Psi_n^2(t) \leqslant \ln^2\left(\frac{1}{4}\sin^2 t\right) = \varphi(t)$. On prouve que φ est intégrable sur $]0,\pi/2]$. Il y est continue et

$$\ln\left(\frac{1}{4}\sin^2 t\right) = -\ln 4 + 2\ln(\sin t) \underset{t\to 0}{\sim} 2\ln(t)$$

et $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} 4\ln^2 t = \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

Le théorème de convergence dominée permet de conclure et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\Psi_n^2(x)\mathrm{d}x = 4\int_0^{\pi/2}\ln^2(\sin t)\mathrm{d}t$. De plus, puisque $\Psi_n(\pi - x) = \Psi_n(x)$, on a, par changement de variable $\int_0^{\pi}\Psi_n^2(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2}\Psi_n^2(x)\mathrm{d}x$. LA question précédente donne

$$\int_0^{\pi}\Psi_n^2(x)\mathrm{d}x = 4\pi\ln^2\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) + 2\pi\sigma\left((b_n-a_n)^2/(a_n+b_n)^2\right) = 4\pi\ln^2 2 + 2\pi\sigma\left((b_n-a_n)^2\right) \text{ car } a_n+b_n = 1.$$

Puisque $b_n - a_n \in [0,1[$ et que σ est continue en 1, lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient

$$8\int_0^{\pi/2}\ln^2(\sin t)\mathrm{d}t = 4\pi\ln^2 2 + 2\pi\sigma(1)$$

Cela donne

$$f''(0) = \int_0^{\pi/2}\ln^2(\sin t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ln^2 2 + \frac{\pi}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi}{2}\ln^2 2 + \frac{\pi^3}{24}$$

5 Convexité logarithmique

17 ▷ Puisque f est de classe $\mathscr{C}^2$ est strictement positive, il suffit de prouver que $(\ln\circ f)'' \geqslant 0$. Avec $h = \ln\circ f$, on a $h' = \frac{f'}{f}$ et $h'' = \frac{ff'' - f'^2}{f^2}$. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz, plutôt sur un segment $[\varepsilon,\pi/2]$ que sur l'intervalle $]0,\pi/2]$ (ce serait faisable en justifiant qu'on peut définir un produit scalaire avec $\int_0^{\pi/2} f.g$ sur un bon espace de fonctions...)
Soit $\varepsilon \in]0,\pi/2[$, on a, pour $x \in I$,

$$\left(\int_\varepsilon^{\pi/2}(\ln\sin t)(\sin t)^x\mathrm{d}t\right)^2 = \left(\int_\varepsilon^{\pi/2}\left((\ln\sin t)(\sin t)^{x/2}\right)\left((\sin t)^{x/2}\right)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_\varepsilon^{\pi/2}(\ln\sin t)^2(\sin t)^x\mathrm{d}t\right).\left(\int_\varepsilon^{\pi/2}(\sin t)^x\mathrm{d}t\right)$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, on obtient $f'^2(x) \leqslant f(x)f''(x)$ pour tout $x \in I$, et ainsi $(\ln\circ f)'' \geqslant 0$. La fonction f est logarithmiquement convexe.

18 ▷ On a la relation $(x+1)f(x) = (x+2)f(x+2)$ pour tout $x \in I$, donc pour $x \geqslant 0$. On en déduit, lorsque $x \geqslant 0$ (et ainsi $2x$ aussi),

$$(2x+1)f(2x) = (2x+2)f(2x+2) \text{ et } \ln(2x+1) + \tilde{f}(x) = \ln(2x+2) + \tilde{f}(x+1)$$

On a donc $\tilde{f}(x+1) - \tilde{f}(x) = \ln\frac{2x+1}{2x+2}$ pour tout $x \geqslant 0$. Pour $x \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\tilde{f}(x+k+1) - \tilde{f}(x+k) = \ln\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}$$

En sommant ces relations pour k allant de 0 à $p-1$, on obtient

$$\tilde{f}(x+p) - \tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{p-1}\ln\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}$$

19 ▷ On a $n-1 < n < n+x \leqslant n+p$. La relation demandée est exactement la formule des pentes pour une fonction convexe (enfin deux fois la formule avec $n-1 < n < n+x$ et $n < n+x < n+p$ lorsque $p \neq x$. On justifie donc que $\tilde{f}$ est convexe. On a $\tilde{f}''(x) = 4(\ln\circ f)''(2x) \geqslant 0$ puisque f est logarithmiquement convexe.

On peut alors utiliser la question précédente pour encadrer $\frac{\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n)}{x}$. On a $\tilde{f}(n) - \tilde{f}(n-1) = \ln\frac{2n-1}{2n}$ de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$ et $\tilde{f}(n+p) - \tilde{f}(n) = \sum_{k=0}^{p-1}\ln\frac{2n+2k+1}{2n+2k+2}$. Il y a p termes (p est fixé), chacun tend vers 0 donc leur somme également. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n)}{x} = 0 \text{ et ainsi } \lim_{n\to+\infty}\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n) = 0$$

20 ▷
- La fonction f est bien une solution au problème posé. Considérons h une fonction logarithmiquement convexe qui vérifié (1) et telle que $h(0) = \frac{\pi}{2}$.
- On considère comme précédemment $\tilde{h} : x \mapsto \ln(h(2x))$. On vérifie que $\tilde{h}$ est bien convexe sachant que $\ln \circ h$ est convexe (il suffit de l'écrire - on ne peut pas a priori parler de la dérivée seconde car on n'a pas d'hypothèse de dérivabilité).
- On a $h(0) = f(0) = \frac{\pi}{2}$. En en déduit par récurrence grâce à la formule (1) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h(n) = f(n)$.
- On peut refaire les questions précédentes, ce qui permet d'en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{h}(n+x) - \tilde{h}(n) = 0$ pour tout $x > 0$. Par différence avec la même limite pour $\tilde{f}$, on obtient que

  $$\lim_{n\to+\infty} \tilde{h}(n+x) - \tilde{f}(n+x) + \tilde{f}(n) - \tilde{h}(n) = 0$$

  Avec l'égalité sur les entiers, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{h}(n+x) - \tilde{f}(n+x) = 0$
- La fonction $\tilde{h}$ vérifie la même relation qu'en question 18 que $\tilde{f}$. Par différence, on en déduit que

  $$\forall x \geqslant 0, p \in \mathbb{N}^*, \tilde{f}(x+p) - \tilde{f}(x) = \tilde{h}(x+p) - \tilde{h}(x)$$

  On a donc $\tilde{h}(x) - \tilde{f}(x) = \tilde{h}(x+p) - \tilde{f}(x+p)$. Ce dernier terme tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$. On en déduit donc que, pour tout $x > 0$, $\tilde{f}(x) = \tilde{h}(x)$ et ainsi, $f(2x) = h(2x)$ pour tout $x > 0$.

On a donc, pour tout $x > 0$, $h(x) = f(x)$. Cette relation reste vraie sur $]-1, 0]$ grâce à la relation (1) :

$$\forall x \in]-1,0], f(x) = \frac{x+2}{x+1} f(x+1) = \frac{x+2}{x+1} h(x+1) = h(x).$$

On peut enfin en conclure que $f = h$ et que donc f est la seule fonction vérifiant les propriétés demandées.

21 ▷ On essaie de se ramener aux questions précédentes. Soit g une fonction qui vérifie, pour tout $t > -T$, $(t+T)g(t) = (t+2T)g(t+2T)$. En simplifiant par T, on a, $\left(\frac{t}{T}+1\right) g\left(T\frac{t}{T}\right) = \left(\frac{t}{T}+2\right) g\left(T(\frac{t}{T}+2)\right)$. Si on note $w : t \mapsto g(T.u)$, cela revient à, pour tout $u > -1$, $(u+1)w(u) = (w+2)w(u+2)$. On ajuste en prenant $v(u) = \frac{\pi}{2}\frac{w(u)}{w(0)}$ afin d'avoir la condition $v(0) = \frac{\pi}{2}$. On vérifie que g log-convexe entraîne w et v log-convexe. On en déduit que $v = f$. Ainsi $g(Tu) = Cf(u)$ pour une certaine constante et $g(t) = Cf(\frac{t}{T})$ pour tout $t > -T$. Réciproquement, ces fonctions conviennent toutes, quelle que soit la constante C.

22 ▷ Avec $t = -T$, on aurait $h(-T) = 0$ et h ne serait pas logarithmiquement convexe car pas strictement positive.