Valeurs d'adhérence de séries entières sur le cercle de convergence

Première partie : convergence au sens de Cesàro

1.

- On commence par le cas où la limite de la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est nulle. Soit $\varepsilon>0$. Il existe un rang $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, $|a_n|<\frac{1}{2}\varepsilon$. Pour $n\geqslant n_0$, on a alors

$$|m_n|\leqslant \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n_0-1}a_k\right|+\frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0}^{n}|a_k|\leqslant\left|\sum_{k=0}^{n_0-1}a_k\right|+\frac{1}{2}\varepsilon.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\left|\sum\limits_{k=0}^{n_0-1}a_k\right|=0$, il existe $n_1\geqslant n_0$ tel que, pour $n\geqslant n_1$, $\left|\sum\limits_{k=0}^{n_0-1}a_k\right|<\frac{1}{2}\varepsilon$. Finalement

$$\forall n\geqslant n_1, |m_n|<\varepsilon.$$

On a bien $\lim\limits_{n\to+\infty}m_n=0$.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\ell$, alors avec $\tilde{a}_n=a_n-\ell$, on est ramené au cas précédent. On a alors $m_n-\ell=\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\tilde{a}_k$ de limite nulle donc $\lim\limits_{n\to+\infty}m_n=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$.
Remarque : pour la démonstration du lemme de Cesàro, on peut également utiliser la sommation des équivalents : si $\lim a_n=\ell\neq 0$ alors $a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\ell$ et $\frac{a_n}{\ell}\underset{n\to+\infty}{\sim}1$. Puisque 1 est positif et que $\sum 1$ diverge, on a $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a_k}{\ell}\underset{n\to+\infty}{\sim}(n+1)$ ce qui donne le résultat. Lorsque la limite est nulle, on utilise à la place $a_n=o(1)$.
- On prend $a_n=(-1)^n$. Cette suite est divergente puisque les deux suites extraites $(a_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(a_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ ont des limites différentes. On a alors $m_{2n}=\frac{1}{2n+1}$ et $m_{2n+1}=0$. La suite $(m_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

2. On note $S_n=a_0+a_1+\ldots+a_n$. On a $(n+1)m_n=S_n$. De plus, pour $n\geqslant 1$,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(n+1)m_n-n.m_{n-1}\text{ et }\frac{a_n}{n}=\frac{(n+1)m_n-n.m_{n-1}}{n}=m_n-m_{n-1}+\frac{m_n}{n}.$$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}m_n=\ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=\ell-\ell+0=0$.

3. On regroupe les termes deux par deux :

$$a_{2k}+a_{2k+1}=(2k)^{\alpha}-(2k+1)^{\alpha}=(2k)^{\alpha}\left(1-(1+\frac{1}{2k})^{\alpha}\right)\underset{k\to+\infty}{\sim}-\alpha\frac{(2k)^{\alpha}}{2k}=-\frac{\alpha}{(2k)^{1-\alpha}}$$

On pose $u_k=a_{2k}+a_{2k+1}$. On a $\lim\limits_{k\to+\infty}u_k=0$. Or

$$m_{2p-1}=\frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{2p-1}a_k=\frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{p-1}u_k$$

d'après le lemme de Cesàro, ce terme tend vers 0. On a alors $m_{2p}=\frac{2p}{2p+1}m_{2p-1}+\frac{a_{2p}}{2p+1}$. Puisque $\alpha\in]0,1[$, on a $\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{(2p)^{\alpha}}{2p+1}=0$ et $\lim\limits_{p\to+\infty}m_{2p}=0$. Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty}m_n=0$ pour cette suite (alors que $|a_n|$ tend vers $+\infty$).

4. La suite $S_n(z_0)$ est C-convergente, on a donc $\frac{S_n(z)}{n}$ de limite nulle. Puisque n et $n+1$ sont équivalents, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}a_kz_0^k=0$. La suite $(a_nz_0^n)$ est donc C-convergente ce qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_nz_0^n}{n}=0$. Si on note R' le rayon de convergence de $\sum\frac{1}{n}a_nz^n$, on a donc $|z_0|\leqslant R'$. Or les séries entières $\sum a_nz^n$ et $\sum\frac{1}{n}a_nz^n$ ont le même rayon de convergence donc $R'=R$. On a donc obtenu $|z_0|\leqslant R$
Remarque : si $|z|<R$, la suite $(S_n(z))$ converge donc est C-convergente. Si la suite est C-convergente alors $|z|\leqslant R$. Il n'y a donc que sur les complexes de module R qu'il peut y avoir discussion (C-convergence mais pas convergence).

5. (a) Le rayon de convergence vaut 1. Pour $|z| \leqslant 1$ et $z \neq 1$, on a $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ et

$$\sigma_n(z) = \frac{1}{1-z}\left(1 - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} z^{k+1}\right) = \frac{1}{1-z}\left(1 - \frac{z}{n+1}\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right)$$

Puisque z^{n+1} est de module 1, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} z^{n+1} = 0$ et $\sigma(z) = \frac{1}{1-z}$.
Si $z = 1$, alors $S_n(1) = n+1$, $\sigma_n(z) = \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+1)}$ de limite infinie. On a donc $R = 1$ et $F = \{z \in \mathbb{U}, z \neq 1\}$ (en notant $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes unitaires).

(b) On ne peut pas avoir à la fois $\alpha = 0$ et $\alpha + \beta = 0$. Pour $z = 1$, la série entière diverge et $R \leqslant 1$. Puisque $(c_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, le rayon de convergence est au moins égal à 1. Finalement $R = 1$.

- Soit z de module 1 différent de ± 1 :

$$\begin{aligned} S_{2n}(z) &= \alpha \sum_{k=0}^{n} z^{2k} + (\alpha+\beta)\sum_{k=0}^{n-1} z^{2k+1} = \frac{1}{1-z^2}\left(\alpha(1-z^{2n+2}) + (\alpha+\beta)z(1-z^{2n})\right) \\ &= \frac{1}{1-z^2}\left(\alpha + (\alpha+\beta)z\right) - \frac{1}{1-z^2}((\alpha+\beta)+\alpha z)z^{2n+1} \\ S_{2n+1}(z) &= S_{2n}(z) + (\alpha+\beta)z^{2n+1} \\ &= \frac{1}{1-z^2}\left(\alpha + (\alpha+\beta)z\right) - \frac{\alpha z + (\alpha+\beta)}{1-z^2} z^{2n+2} \end{aligned}$$

  Pour les mêmes raisons que précédemment, on $\sigma(z) = \frac{1}{1-z^2}\left(\alpha + (\alpha+\beta)z\right)$ si $z \neq \pm 1$.
- pour $z = 1$: $S_{2n}(1) = (2n+1)\alpha + n\beta = \alpha + n(2\alpha+\beta)$ et $S_{2n+1}(1) = (2n+2)\alpha + (n+1)\beta = (n+1)(2\alpha+\beta)$. On a donc

$$\sigma_{2n-1}(z) = \frac{1}{2n}\left(n\alpha + 2(2\alpha+\beta)\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} + 2n(2\alpha+\beta)$$

  dont le module a une limite infinie car $2\alpha + \beta \neq 0$
- pour $z = -1$, on fait un calcul similaire... cette fois c'est la condition $\beta \neq 0$ qui intervient avec la même conclusion.

Bilan : $R = 1$, $F = \mathbb{U}\backslash\{-1, 1\}$ et $\sigma(z) = \frac{1}{1-z^2}\left(\alpha + (\alpha+\beta)z\right)$.

(c) on trouve $R = 1$, $F = \mathbb{U}\backslash\{e^{-i\lambda}, 1\}$, $\sigma(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{\alpha}{1-e^{i\lambda}z}$.

Deuxième partie : un théorème de Kronecker

6. (a) Une fonction de $\mathscr{E}$ est une combinaison linéaire finie de fonctions e_λ. On effectue le calcul pour l'une de ces fonctions : si $\lambda = 0$, on a $\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} e_0(t)\mathrm{d}t = 1$ de limite 1 lorsque x tend vers $+\infty$, et si $\lambda \neq 0$,

$$\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} e^{i\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2i\lambda x}\left[e^{i\lambda t}\right]_{-x}^{x} = \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda x}$$

de limite nulle lorsque x tend vers $+\infty$.
Si $f, g \in \mathscr{E}$ et $\mu \in \mathbb{R}$, pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}(f(t)+\mu g(t))\mathrm{d}t = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t + \mu\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} g(t)\mathrm{d}t$$

d'où, en limite $M(f+\mu g) = M(f) + \mu M(g)$. Enfin, pour tout $x > 0$, $\left|\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \|f\|_\infty$ si bien que $|M(f)| \leqslant \|f\|_\infty$. L'application M est une forme linéaire continue sur $\mathscr{E}$.

(b) Il suffit de montrer que la famille est libre. On peut le faire par récurrence sur le nombre de termes ou avec une matrice de Vandermonde, mais le plus simple est de voir que la fonction e_λ vérifie $e'_\lambda = i\lambda e_\lambda$. Si on considère l'application $f \mapsto f'$ sur $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, les fonctions e_λ en sont des vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes. La famille est donc libre. La seconde partie de la question correspond à ce qu'on a fait dans 6a.

(c) Puisque $e_\lambda.e_\mu = e_{\lambda+\mu}$, le produit de deux combinaisons linéaires de fonctions e_λ restera une telle combinaison linéaire. Si $g \geqslant 0$, pour tout $x > 0$,

$$\left|\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}|f(t)|g(t)\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty.\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} g(t)\mathrm{d}t$$

lorsque x tend vers $+\infty$, on obtient $|M(fg)| \leqslant \|f\|_\infty M(g)$.

7. (a) On regroupe les termes d'indices opposés :

$$K_N(t) = 1+\sum_{j=1}^{N}\frac{N+1-j}{N+1}(e^{ijt}+e^{-ijt}) = 1+2\sum_{j=1}^{N}\frac{N+1-j}{N+1}\cos(jt) = 1+2\sum_{j=1}^{N}\frac{j}{N+1}\cos((N+1-j)t)$$

en effectuant le changement d'indice « $j \leftarrow N+1-j$ ».

(b) si $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $e^{it} \neq 1$ donc

$$\sum_{k=0}^{N} e^{i(\frac{N}{2}-k)t} = e^{i\frac{N}{2}t}\frac{1-e^{-i(N+1)t}}{1-e^{-it}} = e^{i\frac{N}{2}t}\frac{e^{-i\frac{N+1}{2}t}}{e^{-i\frac{N}{2}t}}\frac{2i\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{2i\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} = \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Puisque $t \mapsto \dfrac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ est paire, on peut remplacer t par $-t$ dans la somme. On a alors

$$\left(\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2 = \left(\sum_{p=0}^{N} e^{i(\frac{N}{2}-p)t}\right)\left(\sum_{q=0}^{N} e^{-i(\frac{N}{2}-q)t}\right) = \sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N} e^{-i(q-p)t} = \sum_{k=-N}^{N}\left(\sum_{\substack{p-q=k\\0\leqslant p,q\leqslant N}} e^{ikt}\right)$$

Si $k \in [\![0;N]\!]$, il y a $(N+1-k)$ couples $(p,q) \in [\![0;N]\!]^2$ tels que $p-q=k$ (pour $k=0$, tous les couples (j,j) avec $j \in [\![0;N]\!]$, pour $k=1$, ce sont les couples $(j,j+1)$ avec $j \in [\![0;N-1]\!]\ldots$). De même, il y en a $N+1-|k|$ lorsque $k \in [\![-N;-1]\!]$. Cela donne

$$\left(\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2 = \sum_{k=-N}^{N}(N+1-|k|)e^{ikt} = (N+1)K_N(t).$$

8. (a) On développe brutalement :

$$\begin{aligned} g_N(x) &= \prod_{p=1}^{n+1}\left(\sum_{j=-N}^{N}\left(1-\frac{|j|}{N+1}\right)e^{ij(\lambda_p x+\alpha_p)}\right) \\ &= \sum_{(j_1,\ldots,j_{n+1})\in[\![-N;N]\!]^{n+1}}\left(1-\frac{|j_1|}{N+1}\right)\ldots\left(1-\frac{|j_{n+1}|}{N+1}\right)\exp\big(i(\alpha_1 j_1+\ldots+\alpha_{n+1}j_{n+1})\big)\exp\big(i(\lambda_1 j_1+\ldots+\lambda_{n+1}j_{n+1})x\big) \end{aligned}$$

ce qui donne (en reprenant k_p au lieu de j_p) :

$$g_N = \sum_{(k_1,\ldots,k_{n+1})\in[\![-N;N]\!]^{n+1}}\left(\prod_{p=1}^{n+1}\left(1-\frac{|k_p|}{N+1}\right)\right)\exp\left(i\sum_{p=1}^{n+1}\alpha_p k_p\right)e_{\sum_{p=1}^{n+1}\lambda_p k_p}$$

Par linéarité de M et en utilisant le fait que $M(e_0)=1$ et les autres valeurs sont nulles, on doit regarder quels sont les termes tels que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n+1}\lambda_p k_p = 0$. Puisque la famille $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1})$ est libre sur $\mathbb{Q}$, il n'y a que la combinaison linéaire triviale, avec $k_1 = k_2 = \ldots) k_{n+1} = 0$ qui donne une valeur de λ nulle. On en déduit que $M(g_N)$ est le coefficient devant ce terme (tous les k_i sont nuls), c'est-à-dire $\left(\displaystyle\prod_{p=1}^{n+1}1\right)\exp(0)=1$. On a bien $M(g_N)=1$.

(b) On écrit $g_N = \sum_{(k_1,\dots,k_{n+1})\in[\![-N;N]\!]^{n+1}} a_{k_1,\dots,k_{n+1}} e_{\sum_{p=1}^{n+1}\lambda_p k_p}$. On a

$$f g_N = r_0 g_N + \sum_{j=1}^{n+1} a_j e_{\lambda_j} g_N$$

et $M(f g_N) = r_0 M(g_N) + \sum_{j=1}^{n+1} a_j M(e_{\lambda_j} g_N)$. On calcule alors $M(e_{\lambda_j} g_N)$ avec le même principe que la question précédente. Les termes de $e_{\lambda_j} g_N$ sont des combinaisons des e_μ où μ est sous la forme $\mu = \lambda_j + \sum_{p=1}^{n+1} \lambda_p k_p$. Dans la valeur moyenne, il ne reste que le terme avec $k_p = 0$ si $p \neq j$ et $k_j = -1$. Cela donne

$$M(e_{\lambda_j} g_N) = \left(1 - \frac{1}{N+1}\right)\exp(-i\alpha_j)$$

Finalement

$$M(f g_N) = r_0 + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{N}{N+1} a_j e^{-i\alpha_j} = r_0 + \frac{N}{N+1}\sum_{j=1}^{n+1} r_j$$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(x)| \leqslant r_0 + \sum_{j=1}^{n+1} |a_j| = \sum_{j=0}^{n+1} r_j$$

D'autre part, g_N est positive en tant que produit de $K_N(\lambda_p x + \alpha_p)$ tous positifs sur $\mathbb{R}$. On a donc $|M(f g_N))| \leqslant \|f\|_\infty M(g) = \|f\|_\infty$. Ainsi $\|f\|_\infty \geqslant r_0 + \frac{N}{N+1}\sum_{j=1}^{n+1} r_j$. Cela étant vrai pour tout $N \in \mathbb{N}$, on obtient, lorsqu'on fait tendre N vers $+\infty$, $\|f\|_\infty \geqslant \sum_{j=0}^{n+1} r_j$. Finalement

$$\|f\|_\infty = \sum_{j=0}^{n+1} r_j$$

9. On a, si $k \neq j$, $|u_1 + \ldots + u_m| \leqslant |u_k + u_j| + \sum_{i\neq k,j} |u_i| = |u_k + u_j| + (m-2)$. Cela donne $|u_k + u_j| \geqslant (m-\varepsilon) - (m-2) = 2 - \varepsilon$.
On a également $|u_k + u_j|^2 + |u_k - u_j|^2 = 2(|u_k|^2 + |u_j|^2) = 4$. Cela donne

$$|u_k - u_j|^2 = 4 - |u_k + u_j|^2 \geqslant 4 - (2-\varepsilon)^2 = 4\varepsilon - \varepsilon^2 \geqslant 2\varepsilon,$$

ce qui donne (tout est positif), $|u_k - u_j| \geqslant 2\sqrt{\varepsilon}$.

10. (a) On a les hypothèses de la question 8. On a donc $\|[|_\infty f] = n+2$. Il existe donc une suite de réels (x_m) telle que $\lim_{m\to+\infty} |f(x_m)| = \|f\|_\infty = n+2$.

(b) On se ramène à la question 9. avec $u_1^{(m)} = 1$, $u_{n+2}^{(m)} = e^{2i\pi x_m}$ et $u_j^{(m)} = e^{i\lambda_j x_m} e^{i\alpha_j}$ avec x_m bien choisi. Plus précisément, soit $\varepsilon > 0$ (et $\varepsilon < 1$). Il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m \geqslant m_0$, $|f(x_m)| \geqslant n + 2 - \varepsilon$. Pour $m \geqslant m_0$, on a $|u_1^{(m)} - u_j^{(m)}| \leqslant 2\sqrt{\varepsilon}$. Cela donne $\lim_{m\to+\infty} u_j^{(m)} = 1$. On a donc $\lim_{m\to+\infty} e^{2i\pi x_m} = 1$ et, pour $j \in [\![1;n]\!]$, $\lim_{m\to+\infty} e^{i\lambda_j x_m} e^{i\alpha_j} = 1$, c'est-à-dire $\lim_{m\to+\infty} e^{i\lambda_j x_m} = e^{-i\alpha_j}$.

(c) On a $e^{2i\pi x_m} = e^{2i\pi y_m}$ de limite 1. Cela donne $\lim_{m\to+\infty} \cos(2\pi y_m) = 1$. Puisque $2\pi y_m \in [-\pi, \pi[$, on veut montrer que y_m tend vers 0... on a $1 - \cos(2\pi y_m) = 2\sin^2(\pi y_m)$ donc $\lim_{m\to+\infty} \sin(\pi y_m) = 0$. Puisque, cette fois, $\pi y_m \in [-\pi/2, \pi/2[$, on a $\pi y_m = \arcsin(\sin(\pi y_m))$ donc $\lim_{m\to+\infty} y_m = 0$.

Il vient alors $e^{i\lambda_j x_m} = e^{i\lambda_j N_m} e^{i\lambda_j y_m}$ et, puisque $\lim_{m\to+\infty} e^{i\lambda_j y_m} = 1$, on a bien $\lim_{m\to+\infty} e^{i\lambda_j N_m} = e^{-i\alpha_j}$.

11. (a) Soit I un fermé borné donc un compact. La fonction f est continue sur ce compact et ses bornes sont atteintes. Il existe $x_0 \in I$ tel que $|f(x_0)| = \sup_{x\in I} |f(x)|$. Supposons que $|f(x_0)| = n+2$. On a donc

$$1 - \sum_{j=1}^{n} e^{i\lambda_j x_0} + e^{2i\pi x_0} = n+2$$

On a donc $n+2$ complexes de module 1 dont le module de la somme est égal à la somme des modules. C'est le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire. Tous les complexes sont donc sous la forme $re^{i\theta_0}$ avec $r \geqslant 0$ (et θ_0 fixé). Puisqu'il sont tous de module 1 et que le premier vaut 1, ils sont tous égaux à 1. On aurait donc que $2\pi x_0$ est multiple entier de 2π, ainsi que tous les $\lambda_j x_0$ qui sont des multiples impairs de π. On a donc $x_0 \in \mathbb{Z}$ et $\lambda_j x_0 = (2\mu_j+1)\pi = (\mu+1/2)(2\pi) = (\mu+1/2)\lambda_{n+1}$. On a donc λ_j multiple rationnel de λ_{n+1} ce qui est exclu par indépendance linéaire. On a donc bien $\|f\|_{\infty,I} < n+2$.

(b) Avec la question 10c., on a construit une suite d'entier N_m qui a cette propriété. Si $N_m<0$, on remarque que $e^{-i\lambda_j N_m}$ est le conjugué $e^{i\lambda_j N_m}$ et donc converge également vers 1. On peut donc remplacer N_m par $|N_m|$ afin d'avoir une suite d'entiers positifs. Cette suite est non bornée car si c'était le cas elle serait dans un segment I, on aurait $f(N_m)$ de limite $n+2$ ce qui contredit la question 11.a. La suite est donc non bornée et on peut en extraire une suite de limite infinie : si on a construit $\varphi(0)<\varphi(1)<\ldots<\varphi(p)$ des entiers tels que $N_{\varphi(k)} \geqslant k$, la suite étant non bornée, il existe $\varphi(p+1)>\varphi(p)$ tel que $N_{\varphi(p+1)} \geqslant p+1$. La suite définie par $N'_m = N_{\varphi(m)}$ a la propriété souhaitée.
Par continuité de l'application $z\mapsto z^2$, on a $\lim\limits_{m\to+\infty} e^{2i\lambda_j N'_m} = 1$.

12. on a plusieurs résultats (en utilisant la $\mathbb{Q}$-indépendance linéaire des termes donnés - qu'on mette π ou 2π ne change rien) :

- la question 10c. nous a fait construire une suite d'entiers (N_m) tels que $\lim\limits_{m\to+\infty} e^{i\lambda_j N_m} = e^{-i\alpha_j}$
- la question 11b, nous a fait construire une suite d'entiers $(2N'_m)$ tels que $\lim\limits_{m\to+\infty} e^{2i\lambda_j N'_m} = 1$

par quotient, $\lim\limits_{m\to+\infty} e^{i\lambda_j(2N'_m-N_m)} = 1.e^{i\alpha_j}\ldots$ mais rien n'oblige $2N'_m - N_m$ à tendre vers $+\infty$. On a plus de marge sur $2N'_m$ qu'on remplace par $2N'_{\varphi(m)}$ avec φ une extractrice à construire. Avec un extractrice quelconque, on aura encore

$$\lim_{m\to+\infty} e^{i\lambda_j(2N'_{\varphi(m)}-N_m)} = 1.e^{i\alpha_j}$$

Pour m donné, on choisit $\varphi(m)\in\mathbb{N}$ de sorte que $\varphi(m)>\varphi(m-1)$ et $2N'_{\varphi(m)} - N_m > m$ - c'est possible puisque $2N'_k - N_m$ tend vers $+\infty$ lorsque k tend vers $+\infty$. On a donc construit une suite d'entier $M_m = 2N'_{\varphi(m)} - N_m$, de limite $+\infty$ et telle que $\lim\limits_{m\to+\infty} e^{i\lambda_j M_m} = e^{i\alpha_j}$ pour tout $j\in[\![1;n]\!]$.

Troisième partie : valeurs d'adhérence aux points de C-convergence

13. (a) on reprend donc l'exemple 5a.

- on suppose que $x = \dfrac{p}{q}\pi$ avec $p\wedge q = 1$ et $q\in\mathbb{N}^*$. On a (car $e^{ix}\neq 1$, puisque $e^{ix}\in F$) :

$$\forall n\in\mathbb{N}, S_n(e^{ix}) = \frac{1-e^{i\frac{p(n+1)\pi}{q}}}{1-e^{ix}}$$

l'ensemble des valeurs prises par $e^{i\frac{p(n+1)\pi}{q}}$ est inclus dans l'ensemble des complexes $e^{ikp\pi/q} = e^{ikx\pi}$ pour k allant de 0 à $2q-1$ (on est dans les racines d'ordre $2q$ de l'unité). Si on a une extractrice telle que $S_{\varphi(n)}(e^{ix})$ converge alors elle converge vers l'une de ces racines de l'unité et est donc constante à partir d'un certain rang. Les valeurs d'adhérence de la suite $\left(e^{i\frac{p(n+1)\pi}{q}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc contenues dans $\{e^{ikx\pi}, k\in[\![0;2q-1]\!]\}$ et celles de $S_n(e^{ix})$ dans l'ensemble $\left\{\dfrac{1-e^{ikx\pi}}{1-e^{i}x}, k\in[\![0;2q-1]\!]\right\}$. Réciproquement, montrons que ces complexes sont bien des valeurs d'adhérence. Soit l'un d'eux $\dfrac{1-e^{ikx\pi}}{1-e^{i}x}$ pour $k\in[\![0;2q-1]\!]$ fixé. On se ramène à étudier seulement le cas $e^{ikx\pi}$ en tant que valeur d'adhérence de la suite $\left(e^{i(n+1)x\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Il suffit que $n+1$ soit de la forme $k+2qm$ avec m entier. En posant $\varphi(m) = 2qm+k-1$, on a $e^{i(\varphi(m)+1)x\pi} = e^{ikx\pi+i2mpq\pi} = e^{ikx\pi}$ avec φ strictement croissante, à valeurs entières (et donc de limite infinie). On a donc bien une suite extraite de limite $e^{ikx\pi}$ avec $k\in[\![0;2q-1]\!]$.
- On suppose que $\frac{x}{\pi}\notin\mathbb{Q}$. Avec $z=e^{ix}$, on a $\sigma(z) = \dfrac{1}{1-z} = \dfrac{1}{1-e^{ix}}$ et ainsi $S_n(e^{ix}) - \sigma(e^{ix}) = \dfrac{1}{1-e^{ix}}e^{i(n+1)x\pi}$. On a notamment $e^{ix}\neq 1$ car x n'est pas un multiple entier de π. On a également $\left|S_n(e^{ix})-\sigma(e^{ix})\right| =$

$\dfrac{1}{|1-e^{ix}|}$. Si μ est une valeur d'adhérence de la série entière alors $|\mu-\sigma(e^{ix})| = \dfrac{1}{|1-e^{ix}|}$. Elles se situent donc sur le cercle de centre $\sigma(e^{ix})$ de rayon $\dfrac{1}{|1-e^{ix}|}$. Réciproquement, d'après le théorème de Kronecker, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une suite (N_m) d'entiers telle que $\lim\limits_{m\to+\infty} e^{ixN_m} = e^{i\alpha}$. De cette suite de limite infinie, on peut extraire une suite croissante de limite infinie (une fois construit les m premiers termes, il en existe un $m+1$-ème parmi les m premiers strictement plus grands). On a donc une extractrice φ telle que $e^{ix\varphi(m)}$ tend vers $e^{i\alpha}$ lorsque m tend vers $+\infty$. Ainsi $\lim\limits_{m\to+\infty} S_{\varphi(m)-1}(e^{ix})-\sigma(e^{ix}) = \dfrac{e^{i\alpha}}{1-e^{ix}}$. Si on écrit $\dfrac{1}{1-e^{ix}} = \dfrac{1}{[|1-e^{ix}|}e^{i\theta}$, on obtient une limite $\dfrac{1}{|1-e^{ix}|}e^{i(\alpha+\theta)}$. Le réel α étant quelconque, on obtient tous les points du cercle de rayon $\dfrac{1}{[|1-e^{ix}|}$.

(b) on reprend les résultats de 5b : on a montré que $\sigma(z) = \dfrac{1}{1-z^2}\left(\alpha+(\alpha+\beta)z\right)$ si $z \in F = \mathbb{U}\backslash\{-1,1\}$. Le calcul nous a amené à séparer les sommes partielles S_{2n} et S_{2n+1}. Si φ est une extractrice telle que $S_{\varphi(n)}(e^{ix})$ converge, alors l'ensemble des valeurs $\varphi(n)$ contient au moins une infinité de valeurs paires ou une infinité de valeurs impaires. Si on a une valeur d'adhérence de $S_n(e^{ix})$ alors c'est une valeur d'adhérence de $S_{2n}(e^{ix})$ ou de $S_{2n+1}(e^{ix})$. On peut donc séparer l'étude en 2.

- cas pair : on a

$$S_{2n}(e^{ix})-\sigma(e^{ix}) = -\frac{1}{1-e^{2ix}}((\alpha+\beta)+\alpha e^{ix})e^{(2n+1)ix} = -\frac{e^{ix}}{1-e^{2ix}}((\alpha+\beta)+\alpha e^{ix})e^{2nix}$$

  Puisque $\frac{2x}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, le théorème de Kronecker nous donne à nouveau que les valeurs d'adhérence vont être tous les complexes $-\dfrac{e^{ix}}{1-e^{2ix}}((\alpha+\beta)+\alpha e^{ix})e^{i\alpha}$ et ainsi on obtient le cercle de centre $\sigma(e^{ix})$ et de rayon $\left|\dfrac{e^{ix}}{1-e^{2ix}}((\alpha+\beta)+\alpha e^{ix})\right| = \left|\dfrac{\alpha+\beta+\alpha e^{ix}}{2\sin x}\right|$.
- de la même manière, les valeurs d'adhérence pour les sommes partielles d'indices impairs décrivent le cercle de centre $\sigma(e^{ix})$ et de rayon $\left|\dfrac{e^{ix}}{1-e^{2ix}}((\alpha+\beta)e^{ix}+\alpha)\right| = \left|\dfrac{(\alpha+\beta)e^{ix}+\alpha}{2\sin x}\right|$.

remarque : on peut comparer les carrés des rayons et voir qu'ils sont différents car $\alpha/\beta \notin \mathbb{R}$:

$$\left|(\alpha+\beta)e^{ix}+\alpha\right| = \left|(\alpha+\beta)+\alpha e^{ix}\right| \Leftrightarrow \left|(\alpha+\beta)+\alpha e^{-ix}\right| = \left|(\alpha+\beta)+\alpha e^{ix}\right| \Leftrightarrow \left|(1+\frac{\beta}{\alpha})+e^{-ix}\right| = \left|(1+\frac{\beta}{\alpha})+e^{ix}\right|$$

Le nombre $1+\dfrac{\beta}{\alpha}$ est sur la médiatrice des points d'affixes $-e^{ix}$ et $-e^{-ix}$ donc est un réel, ce qui est exclu.

(c) si on avait les vrais calculs de 5c, on aurait pu envisager de faire cette question. Pas envie, tant pis... et honnêtement cela n'apporte pas grand chose (si ce n'est le résultat)