

# X, Première composition MP 2009

Corrigé rédigé par Denis Choimet

*L'auteur de ce corrigé remercie par avance les lecteurs qui voudront bien lui indiquer les erreurs qu'ils auront détectées.*

## PREMIÈRE PARTIE

1. Fixons  $x \in \mathbb{R}$ , et considérons la fonction

$$u_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(e^t x).$$

Elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et  $u'_x(t) = e^t x f'(e^t x)$  pour  $t \in \mathbb{R}$ . En particulier,  $u'_x(0) = x f'(x)$ , soit

$$\left. \frac{d}{dt}(\Phi_t f)(x) \right|_{t=0} = (A f)(x).$$

2. Par linéarité, on peut supposer sans perte de généralité que  $f$  est un monôme :  $f(x) = x^p$  pour  $x \in \mathbb{R}$ , où  $p$  est un entier naturel. On a alors  $(A f)(x) = p x^p$ ,  $(A^2 f)(x) = p^2 x^p$  et, par une récurrence immédiate :

$$(A^n f)(x) = p^n x^p \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

Dès lors, l'égalité

$$\left| \frac{t^n}{n!} (A^n f)(x) \right| = \frac{(|t|p)^n}{n!} |x^p|$$

et le fait que le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{z^n}{n!}$  est infini montrent que

$$\text{la série } \sum \frac{t^n}{n!} (A^n f)(x) \text{ est absolument convergente pour tout } (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

On a de plus

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (A^n f)(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tp)^n}{n!} = x^p e^{tp} = f(e^t x),$$

soit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (A^n f)(x) = (\Phi_t f)(x).$$

3. On procède naturellement par récurrence :

- Le résultat est clair si  $n = 1$ .
- S'il est vrai au rang  $n \geq 1$ , alors<sup>1</sup>

$$D^{n+1} X = D(D^n X) = D(X D^n + n D^{n-1}) = D^n + X D^{n+1} + n D^n = X D^{n+1} + (n+1) D^n.$$

Cela prouve que

$$D^n X = X D^n + n D^{n-1} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

4. Ici encore, procédons par récurrence sur  $n \geq 1$ .

---

<sup>1</sup>Les produits écrits sont à entendre au sens de la composition.

- Si  $n = 1$  : on a

$$A^1 = A = XD = \sum_{k=1}^1 \mu_{1,k} X^k D^k,$$

avec

$$\mu_{1,1} = 1.$$

- Soit  $n \geq 2$  ; supposons le résultat vrai au rang  $n - 1$ . On a alors

$$\begin{aligned} A^n &= A(A^{n-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} \mu_{n-1,k} A X^k D^k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mu_{n-1,k} X D X^k D^k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mu_{n-1,k} X (k X^{k-1} D^k + X^k D^{k+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k \mu_{n-1,k} X^k D^k + \sum_{k=2}^n \mu_{n-1,k-1} X^k D^k \\ &= \sum_{k=1}^n \mu_{n,k} X^k D^k, \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{cases} \mu_{n,1} = \mu_{n-1,1} \\ \mu_{n,k} = k \mu_{n-1,k} + \mu_{n-1,k-1} \text{ pour } 2 \leq k \leq n-1 \\ \mu_{n,n} = \mu_{n-1,n-1}. \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que

$$\mu_{n,1} = \mu_{n,n} = 1 \text{ pour } n \geq 1.$$

**Remarque 1.** L'utilité de la question 3 n'est pas aveuglante.

**5.** Ici encore, par linéarité, on peut supposer que  $f(x) = x^p$  pour  $x \in \mathbb{R}$ , où  $p$  est un entier naturel. D'après les questions 2 et 4, on a, pour  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} f(e^t x) &= (\Phi_t f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (A^n f)(x) \\ &= f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=1}^n \mu_{n,k} (X^k D^k f)(x) \\ &= f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=1}^n \mu_{n,k} x^k f^{(k)}(x) \\ &= f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mu_{n,k} x^k f^{(k)}(x) \end{aligned}$$

en posant  $\mu_{n,k} = 0$  pour  $k > n$ . L'idée naturelle est alors de *permuter* les deux sommes. Vérifions les hypothèses du théorème de Fubini discret.

- Tout d'abord, pour chaque  $n \geq 1$ , la série<sup>2</sup>

$$\sum_k \frac{|t|^n}{n!} |\mu_{n,k}| |x|^k |f^{(k)}(x)|$$

est convergente. En effet, les termes d'indice  $> n$  de cette série sont nuls !

---

<sup>2</sup>On écrit  $\sum_k$  pour signifier que la variable de sommation est  $k$ .

- Pour  $n \geq 1$ , posons

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|t|^n}{n!} |\mu_{n,k}| |x|^k |f^{(k)}(x)|.$$

Il s'agit de montrer que la série  $\sum S_n$  est convergente. Or, les formules de récurrence obtenues à la question 4. montrent que les  $\mu_{n,k}$  sont des entiers *positifs*. Par suite, pour  $n \geq \max(p, 1)$ , on a

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{|t|^n}{n!} \sum_{k=1}^n \mu_{n,k} |x|^k |f^{(k)}(x)| \\ &= \frac{|t|^n}{n!} \sum_{k=1}^p \mu_{n,k} \frac{p!}{(p-k)!} |x|^p \\ &= \frac{|t|^n}{n!} \sum_{k=1}^p \mu_{n,k} (X^k D^k f)(|x|) \\ &= \frac{|t|^n}{n!} (A^n f)(|x|) \end{aligned}$$

qui est le terme général d'une série convergente d'après la question 2.

D'après le théorème de Fubini, on a donc<sup>3</sup>

$$f(e^t x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mu_{n,k} x^k f^{(k)}(x).$$

En nous souvenant que  $\mu_{n,k} = 0$  si  $k > n$ , nous pouvons enfin conclure :

$$f(e^t x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mu_{n,k} \right) x^k f^{(k)}(x).$$

**6.** C'est une question de cours, les rayons de convergence de ces deux séries entières sont égaux.

**Remarque 2.** Cette question est vaguement utile à la question 7.e).

**7.a)** C'est une conséquence immédiate des faits suivants :  $(e^t - 1)x \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$  et  $R - |x| > 0$ .

**7.b)** Fixons  $x \in ]-R, R[$  et  $t \in ]-\gamma_x, \gamma_x[$ . D'après le fait admis, la fonction  $f$  est développable en série entière au voisinage de  $x$ , avec un rayon de convergence au moins égal à  $R - |x|$ . Par suite, on a

$$f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (y - x)^k \text{ pour tout } y \in \mathbb{R} \text{ tel que } |y - x| < R - |x|.$$

Or,

$$|e^t x - x| = |(e^t - 1)x| < R - |x|$$

puisque  $|t| < \gamma_x$ . De la sorte,

$$\begin{aligned} f(e^t x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (e^t x - x)^k \\ &= f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e^t - 1)^k}{k!} x^k f^{(k)}(x). \end{aligned}$$

D'autre part, la fonction  $t \mapsto e^t - 1$  est nulle en 0 et développable en série entière au voisinage de 0, avec un rayon de convergence infini. D'après les théorèmes opératoires sur les séries entières<sup>4</sup>, il en est

<sup>3</sup>La convergence, pour chaque  $k \geq 1$ , de la série  $\sum_n \frac{t^n}{n!} \mu_{n,k} x^k f^{(k)}(x)$  fait partie du théorème.

<sup>4</sup>Plus exactement, il s'agit des propriétés du produit de Cauchy de plusieurs séries absolument convergentes.

de même de la fonction  $t \mapsto (e^t - 1)^k$ , donc aussi de  $t \mapsto \frac{1}{k!}(e^t - 1)^k$ , pour chaque  $k \geq 1$ . Il existe donc des réels  $(\lambda_{n,k})_{n \geq 1}$  tels que

$$\frac{(e^t - 1)^k}{k!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n,k}}{k!} t^k \text{ pour } k \geq 1 \text{ et } t \in \mathbb{R}.$$

Dès lors, on a

$$f(e^t x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \lambda_{n,k} \right) x^k f^{(k)}(x).$$

**7.c)** Suivons l'indication, et appliquons les résultats des questions 5 et 7.b) à un monôme  $f : x \mapsto x^p$ , où  $p \in \mathbb{N}^*$  est fixé. Dans ce cas, avec les notations de la question 7, on a  $R = \gamma_x = +\infty$ , et

$$x^k f^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{p!}{(p-k)!} x^p & \text{si } 1 \leq k \leq p, \\ 0 & \text{si } k > p. \end{cases}$$

On obtient l'égalité suivante<sup>5</sup>, valable pour  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\sum_{k=1}^p \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mu_{n,k} \right) \frac{p!}{(p-k)!} x^p = \sum_{k=1}^p \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \lambda_{n,k} \right) \frac{p!}{(p-k)!} x^p,$$

d'où

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{(p-k)!} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mu_{n,k} \right) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{(p-k)!} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \lambda_{n,k} \right),$$

soit encore<sup>6</sup>, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^p \frac{1}{(p-k)!} \mu_{n,k} \right) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^p \frac{1}{(p-k)!} \lambda_{n,k} \right) \frac{t^n}{n!}$$

Par unicité du développement en série entière, cela donne

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{(p-k)!} (\lambda_{n,k} - \mu_{n,k}) = 0 \text{ pour } n, p \geq 1. \quad (1)$$

Fixons  $n \geq 1$ , et montrons par récurrence sur  $k$  que  $\lambda_{n,k} = \mu_{n,k}$  pour tout  $k \geq 1$ .

- En appliquant (1) à  $p = 1$ , on obtient  $\lambda_{n,1} = \mu_{n,1}$ .
- Supposons que  $\lambda_{n,k} = \mu_{n,k}$  pour  $1 \leq k \leq p-1$ , où  $p \geq 2$  est fixé. L'égalité (1) donne alors  $\lambda_{n,p} = \mu_{n,p}$ .

En définitive,  $\lambda_{n,k} = \mu_{n,k}$  pour  $n, k \geq 1$  ce qui, compte tenu de nos conventions s'écrit

$$\lambda_{n,k} = \begin{cases} \mu_{n,k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

**7.d)** On procède par récurrence sur  $n$ , en utilisant les relations vues à la question 4 qui sont désormais valables pour les  $\lambda_{n,k}$ .

- Si  $n = 1$ , on doit montrer que  $\lambda_{1,1} \leq 2$ , ce qui est vrai puisque  $\lambda_{1,1} = \mu_{1,1} = 1$ .
- Supposons le résultat vrai au rang  $n-1$ , où  $n \geq 2$  est fixé. Tout d'abord,

$$\lambda_{n,1} = 1 \leq 2^n \frac{n!}{0!} \text{ et } \lambda_{n,n} = 1 \leq 2^n \frac{n!}{(n-1)!}.$$

<sup>5</sup>avec la convention  $\mu_{n,k} = 0$  si  $k > n$ .

<sup>6</sup>La somme extérieure étant finie et toutes les séries convergentes, il n'y a pas de problème d'échange de symboles ici.

Fixons à présent un entier  $k$  tel que  $2 \leq k \leq n-1$ . D'après la question 4, on a

$$\begin{aligned}\lambda_{n,k} &= k\lambda_{n-1,k} + \lambda_{n-1,k-1} \\ &\leq k2^{n-1}\frac{(n-1)!}{(k-1)!} + 2^{n-1}\frac{(n-1)!}{(k-2)!} \\ &\leq \frac{2^{n-1}(n-1)!}{(k-2)!} \left( \frac{k}{k-1} + 1 \right) = 2^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!} k \\ &\leq 2^n \frac{n!}{(k-1)!}.\end{aligned}$$

Cela prouve que

$$\lambda_{n,k} \leq 2^n \frac{n!}{(k-1)!} \text{ pour } 1 \leq k \leq n.$$

**7.e)** Dans cette question,  $x$  et  $t$  sont deux réels fixés tels que  $|x| < R$ . Commençons par remarquer que si  $k > n$ ,  $Z_{n,k} = 0$  d'après la question 7.c). Si  $1 \leq k \leq n$ , on a

$$|Z_{n,k}| \leq \frac{|t|^n}{n!} 2^n \frac{n!}{(k-1)!} |x|^k |f^{(k)}(x)| = |2t|^n \frac{|x|^k}{(k-1)!} |f^{(k)}(x)|$$

d'après la question 7.d). Pour conclure, nous avons besoin d'un contrôle des dérivées successives de  $f$  au point  $x$ , qui va découler du fait que  $f$  est développable en série entière au voisinage de  $x$  (fait admis), avec un rayon de convergence au moins égal à  $R - |x|$ . Fixons un réel  $\rho$  tel que  $0 < \rho < R - |x|$ . D'après le lemme d'Abel, le terme général de la série  $\sum \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \rho^k$  est borné, d'où l'existence d'une constante réelle strictement positive<sup>7</sup>  $M$  telle que

$$|f^{(k)}(x)| \leq M k! \rho^{-k}.$$

On en déduit la majoration

$$|Z_{n,k}| \leq M |2t|^n k \left( \frac{|x|}{\rho} \right)^k \text{ pour } 1 \leq k \leq n,$$

et cette majoration est bien évidemment valable aussi si  $k > n$ . Posons alors

$$\alpha = \rho \text{ et } \eta = \frac{1}{2}$$

et supposons que  $|x| < \alpha$  et  $|t| < \eta$ . À  $k \geq 1$  fixé, la série  $\sum_n |Z_{n,k}|$  est convergente, et

$$\sum_{n=1}^{\infty} |Z_{n,k}| \leq M k \left( \frac{|x|}{\rho} \right)^k \frac{2|t|}{1 - 2|t|},$$

de sorte que la série de terme général  $\sum_{n=1}^{\infty} |Z_{n,k}|$  est convergente. En définitive,

$$\text{si } |x| < \alpha \text{ et } |t| < \eta, \text{ alors } \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |Z_{n,k}| \right) < \infty.$$

**7.f)** Supposons toujours que  $|x| < \alpha$  et  $|t| < \eta$ . D'après la question 7.e), le théorème de Fubini s'applique et donne

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} Z_{n,k} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} Z_{n,k} \right). \quad (2)$$

Or, le membre de gauche de (2) vaut

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} Z_{n,k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k f^{(k)}(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \lambda_{n,k} = f(e^t x) - f(x) \quad (3)$$

---

<sup>7</sup>dépendant de  $x$  et de  $\rho$ .

d'après la question 7.b). Quant au membre de droite de (2), il vaut

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} Z_{n,k} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n,k} x^k f^{(k)}(x) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left( \sum_{k=1}^n \mu_{n,k} x^k f^{(k)}(x) \right) \text{ d'après la question 7.c) } \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (A^n f)(x).
\end{aligned} \tag{4}$$

En rapprochant (3) et (4), on en déduit que

$$f(e^t x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (A^n f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (A^n f)(x),$$

ou encore

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (A^n f)(x) = (\Phi_t f)(x).$$

## DEUXIÈME PARTIE

**8.** Fixons  $k \in \mathbb{N}$ . Par hypothèse, la fonction  $x \mapsto (1+x^2)x^k f(x)$  est bornée, d'où l'existence d'une constante réelle telle que

$$|x^k f(x)| \leq \frac{M}{1+x^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Cela prouve l'intégrabilité sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $x \mapsto x^k f(x)$ .

**9.a)** Fixons  $x \in \mathbb{R}$ . Par hypothèse, la fonction  $f$  est bornée par, disons,  $M$ . On a alors

$$|f(x-y)g(y)| \leq M|g(y)| \text{ pour } y \in \mathbb{R},$$

et la fonction  $g$  est intégrable d'après la question précédente.

$$\text{Cela prouve l'intégrabilité sur } \mathbb{R} \text{ de la fonction } y \mapsto f(x-y)g(y).$$

**9.b)** Vérifions d'abord la continuité de  $f * g$ .

- Pour chaque  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $y \mapsto f(x-y)g(y)$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .
- Pour chaque  $y \in \mathbb{R}$ , la fonction  $x \mapsto f(x-y)g(y)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- Enfin, si  $M$  est une constante réelle telle que  $|f| \leq M$ , on a

$$|f(x-y)g(y)| \leq M|g(y)| \text{ pour } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

la fonction  $y \mapsto M|g(y)|$  étant intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

Tout cela prouve que  $f * g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Fixons à présent  $k \in \mathbb{N}$ , et montrons que la fonction  $x \mapsto x^k (f * g)(x)$  est bornée, ce qui demande un peu de soin.

- Tout d'abord, comme  $f$  et  $g$  sont éléments de  $\mathcal{F}$ , il existe des constantes réelles  $M_1$  et  $M_2$  telles que

$$|f(t)| \leq \frac{M_1}{1+|t|^k} \text{ et } |g(t)| \leq \frac{M_2}{(1+t^2)(1+|t|^k)} \text{ pour } t \in \mathbb{R}.$$

Dès lors, pour  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$|x^k (f * g)(x)| \leq M_1 M_2 \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^k}{(1+|x-y|^k)(1+|y|^k)} \frac{dy}{1+y^2}.$$

- Soit alors  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
  - Si  $|y| \geq \frac{|x|}{2}$ , on a

$$\frac{|x|^k}{(1 + |x - y|^k)(1 + |y|^k)} \leq \frac{|x|^k}{1 + |y|^k} \leq \frac{|x|^k}{1 + 2^{-k}|x|^k} \leq 2^k.$$

- Si  $|y| < \frac{|x|}{2}$ , on a  $|x - y| \geq |x| - |y| \geq \frac{|x|}{2}$ , de sorte que

$$\frac{|x|^k}{(1 + |y - x|^k)(1 + |y|^k)} \leq \frac{|x|^k}{1 + |y - x|^k} \leq \frac{|x|^k}{1 + 2^{-k}|x|^k} \leq 2^k.$$

Finalement, en posant  $M = M_1 M_2 2^k$ , on a montré que

$$|x^k(f * g)(x)| \leq M \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{1 + y^2} = \pi M \text{ pour } x \in \mathbb{R},$$

ce qui prouve que la fonction  $x \mapsto x^k(f * g)(x)$  est bornée.

Enfin, si  $k \in \mathbb{N}$ , on a, pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$x^k = (x - y + y)^k = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (x - y)^p y^{k-p},$$

d'où

$$m_k(f * g) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} x^k f(x - y) g(y) dy \right) dx = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} (x - y)^p f(x - y) y^{k-p} g(y) dy \right) dx.$$

Admettons provisoirement la possibilité d'échanger les deux intégrales. Il vient

$$\begin{aligned} m_k(f * g) &= \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} (x - y)^p f(x - y) y^{k-p} g(y) dx \right) dy \\ &= \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \int_{\mathbb{R}} y^{k-p} g(y) \left( \int_{\mathbb{R}} (x - y)^p f(x - y) dx \right) dy \\ &= \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \int_{\mathbb{R}} y^{k-p} g(y) \left( \int_{\mathbb{R}} u^p f(u) du \right) dy \\ &= \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \left( \int_{\mathbb{R}} u^p f(u) du \right) \left( \int_{\mathbb{R}} y^{k-p} g(y) dy \right), \end{aligned}$$

soit finalement

$$\boxed{m_k(f * g) = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} m_p(f) m_{k-p}(g).}$$

Quant à la permutation de deux intégrales, elle repose essentiellement sur le théorème de Fubini, qu'on peut écrire de façon synthétique sous la forme suivante<sup>8</sup> :

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |(x - y)^p f(x - y) y^{k-p} g(y)| dx \right) dy = \left( \int_{\mathbb{R}} |u|^p |f(u)| du \right) \left( \int_{\mathbb{R}} |y|^{k-p} |g(y)| dy \right) < +\infty.$$

**10.** Tout d'abord, d'après la question 9.b), on a

$$m_0(f_1 * f_2) = m_0(f_1) m_0(f_2) = 1.$$

---

<sup>8</sup>On utilise ici le vrai théorème de Fubini, pas la version démentielle du programme MP.

Ensuite, par récurrence et en utilisant l'associativité du produit de convolution, on obtient

$$\boxed{m_0(f_1 * \dots * f_n) = 1.}$$

D'après cette même question, on a

$$m_1(f_1 * f_2) = m_0(f_1)m_1(f_2) + m_1(f_1)m_0(f_2) = 0.$$

On en déduit que

$$\boxed{m_1(f_1 * \dots * f_n) = 0.}$$

**Remarque 3.** On voit ici que  $\mathcal{F}_0$  est stable par le produit de convolution.

Enfin,

$$m_2(f_1 * f_2) = m_0(f_1)m_2(f_2) + m_1(f_1)m_1(f_2) + m_2(f_1)m_0(f_2) = m_2(f_1) + m_2(f_2).$$

Par récurrence :

$$\boxed{m_2(f_1 * \dots * f_n) = \sum_{i=1}^n m_2(f_i).}$$

11. On calcule :

$$m_k(T_a f) = a \int_{\mathbb{R}} x^k f(ax) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{u}{a}\right)^k f(u) du = a^{-k} \int_{\mathbb{R}} u^k f(u) du,$$

d'où

$$\boxed{m_k(T_a f) = a^{-k} m_k(f).}$$

**12.a)** Observons tout d'abord que la classe  $\mathcal{F}_0$  est stable par l'endomorphisme  $T_a$  pour tout  $a > 0$ , ainsi que par le produit de convolution comme on l'a observé plus haut. De ce fait, les intégrales envisagées dans cette question existent bien. Pour aller plus loin, essayons d'exploiter les deux questions précédentes. Pour  $n \geq 1$ , on a

$$0 \leq m_2(T_n F_n) = n^{-2} m_2(F_n) = n^{-2} \sum_{i=1}^n m_2(f_i) \leq n^{-2} \sum_{i=1}^n C = n^{-1} C.$$

Cela prouve que

$$m_2(T_n F_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Or, pour  $\alpha > 0$  et  $n \geq 1$ , on a

$$0 \leq \int_{\alpha}^{+\infty} (T_n F_n)(x) dx \leq \int_{\alpha}^{+\infty} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 (T_n F_n)(x) dx \leq \alpha^{-2} m_2(T_n F_n),$$

la dernière inégalité étant vraie parce que la fonction  $T_n F_n$  est positive. On a ainsi prouvé que

$$\boxed{\int_{\alpha}^{+\infty} (T_n F_n)(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.}$$

On montre de la même façon que

$$\int_{-\infty}^{-\alpha} (T_n F_n)(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

**12.b)** Écrivons, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h(x) = h(0) + \psi(x)$ , où  $\psi$  est continue, bornée et nulle en 0. Comme

$$|h(x)(T_n F_n)(x)| \leq \|h\|_{\infty} (T_n F_n)(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R},$$

la fonction  $x \mapsto h(x)(T_n F_n)(x)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . De plus,

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)(T_n F_n)(x)dx = h(0)m_0(T_n F_n) + \int_{\mathbb{R}} \psi(x)(T_n F_n)(x)dx = h(0) + \int_{\mathbb{R}} \psi(x)(T_n F_n)(x)dx,$$

puisque, comme  $T_n F_n \in \mathcal{F}_0$ ,  $m_0(T_n F_n) = 1$ . La question précédente montre que, si  $n$  est grand, la fonction  $T_n F_n$  « concentre toute sa masse » au voisinage de 0, c'est-à-dire précisément à un endroit où la fonction  $\psi$  est petite : cela risque de rendre l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)(T_n F_n)(x)dx$  petite. Formalisons cette idée, en fixant  $\varepsilon > 0$  puis  $\alpha > 0$  tel que  $|\psi(x)| \leq \varepsilon$  si  $|x| \leq \alpha$ . On a alors, pour  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} \psi(x)(T_n F_n)(x)dx \right| &\leq \int_{|x| \geq \alpha} |\psi(x)|(T_n F_n)(x)dx + \int_{-\alpha}^{\alpha} |\psi(x)|(T_n F_n)(x)dx \\ &\leq \|\psi\|_{\infty} \int_{|x| \geq \alpha} (T_n F_n)(x)dx + \varepsilon \int_{-\alpha}^{\alpha} (T_n F_n)(x)dx \\ &\leq \|\psi\|_{\infty} \int_{|x| \geq \alpha} (T_n F_n)(x)dx + \varepsilon \int_{\mathbb{R}} (T_n F_n)(x)dx \\ &= \|\psi\|_{\infty} \int_{|x| \geq \alpha} (T_n F_n)(x)dx + \varepsilon. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, il existe un entier naturel  $N$  tel que

$$\|\psi\|_{\infty} \int_{|x| \geq \alpha} (T_n F_n)(x)dx \leq \varepsilon \text{ si } n \geq N.$$

Pour  $n \geq N$ , on aura donc

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \psi(x)(T_n F_n)(x)dx \right| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui prouve que

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x)(T_n F_n)(x)dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On peut alors conclure :

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} h(x)(T_n F_n)(x)dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} h(0).}$$

**13.a)** Soit  $f \in \mathcal{F}_0$ . On a, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$m_2(f) = \int_{\mathbb{R}} (x^2 \sqrt{f(x)}) \sqrt{f(x)} dx \leq \left( \int_{\mathbb{R}} x^4 f(x) dx \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right)^{1/2} = m_4(f)^{1/2} m_0(f)^{1/2} = m_4(f)^{1/2}.$$

Cela prouve que

$$\boxed{m_2(f)^2 \leq m_4(f).}$$

**13.b)** Procédons par récurrence sur  $n$ .

- Si  $n = 1$ ,  $F_1 = f_1$  et l'égalité à montrer est claire.
- Soit  $n \geq 1$ . Supposons le résultat vrai au rang  $n$ . On a alors, d'après les questions 9.b) et 10, ainsi que l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} m_4(F_{n+1}) &= m_4(F_n * f_{n+1}) \\ &= m_4(F_n)m_0(f_{n+1}) + 4m_3(F_n)m_1(f_{n+1}) + 6m_2(F_n)m_2(f_{n+1}) \\ &\quad + 4m_1(F_n)m_3(f_{n+1}) + m_0(F_n)m_4(f_{n+1}) \\ &= m_4(F_n) + 6m_2(F_n)m_2(f_{n+1}) + m_4(f_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} m_4(f_i) + 6 \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_2(f_i)m_2(f_j) + 6m_2(f_{n+1}) \sum_{i=1}^n m_2(f_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} m_4(f_i) + 6 \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} m_2(f_i)m_2(f_j). \end{aligned}$$

On a donc montré par récurrence l'égalité

$$m_4(F_n) = \sum_{i=1}^n m_4(f_i) + 6 \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_2(f_i)m_2(f_j).$$

**13.c)** Comme à la question 12.a), on a, pour  $\alpha > 0$  fixé et  $n \geq 1$  :

$$\int_{\alpha}^{+\infty} (T_n F_n)(x) dx \leq \int_{\alpha}^{+\infty} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^4 (T_n F_n)(x) dx \leq \alpha^{-4} m_4(T_n F_n) = \alpha^{-4} n^{-4} m_4(F_n). \quad (5)$$

Or, d'après l'inégalité de la question 13.a), on a

$$m_4(F_n) = \sum_{i=1}^n m_4(f_i) + 6 \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_2(f_i)m_2(f_j) \leq \sum_{i=1}^n m_4(f_i) + 6 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (m_4(f_i)m_4(f_j))^{1/2}.$$

Supposons désormais les  $m_4(f_i)$  majorés par une même constante  $C$ . On a alors

$$m_4(F_n) \leq nC + 6 \frac{n(n-1)}{2} C,$$

de sorte que  $m_4(F_n) = O(n^2)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , d'où, d'après (5) :

$$\int_{\alpha}^{+\infty} (T_n F_n)(x) dx = O(n^{-2}) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Sous notre hypothèse,

$$\text{la série } \sum \int_{\alpha}^{+\infty} (T_n F_n)(x) dx \text{ est donc convergente.}$$