

## I Fonctions harmoniques : quelques propriétés

**Q 1.** La fonction nulle est dans l'ensemble. Par linéarité des dérivations, on prouve la stabilité par combinaisons linéaires.

**Q 2.** Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , on peut permuter les dérivations. On a alors, si  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$  et  $g = \frac{\partial f}{\partial x_k}$ ,

$$\frac{\partial(\Delta f)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = \Delta g.$$

Si  $f$  est harmonique alors  $g$  l'est également et ainsi toutes les dérivées partielles de  $f$  sont dans  $\mathcal{H}(U)$ . En réitérant (ou en faisant directement la même chose sur une dérivée partielle d'ordre quelconque de  $f$ ), on obtient le même résultat pour toute dérivée partielle à un ordre quelconque de  $f$ .

**Q 3.** On calcule  $\Delta f^2$ . On a

$$\frac{\partial f^2}{\partial x_i} = 2f \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ et } \frac{\partial^2 f^2}{\partial x_i^2} = 2 \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 + f \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2},$$

et ainsi

$$\Delta(f^2) = f \cdot \Delta f + 2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2$$

Si  $f \in \mathcal{H}(U)$ , alors  $\Delta(f^2) = 2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2$ . Ce terme est nul si et seulement si, pour tout

$i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  est nulle sur  $U$ . L'ensemble  $U$  étant un ouvert connexe par arcs, cela donne  $f$  constante. Les seules fonctions pour lesquelles  $f$  et  $f^2$  sont dans  $\mathcal{H}(U)$  lorsque  $U$  est connexe par arcs sont les fonctions constantes.

**Q 4.** Les fonctions  $p_i : x \mapsto x_i$  sont dans  $\mathcal{H}(U)$ . On a  $p_i^2 : x \mapsto x_i^2$  est  $\Delta(p_i^2) = 2$ . Le produit de deux fonctions harmoniques n'est donc pas forcément une fonction harmonique.

## II Exemples de fonctions harmoniques

### II.A - Variables séparables

**Q 5.** On vérifie facilement que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\Delta f(x, y) = u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = 0$ . Puisque  $f$  n'est pas la fonction nulle, il existe  $y_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $v(y_0) \neq 0$ . On a alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $v(x_0)u''(x) + v''(y_0)u(x) = 0$ . On peut poser  $\lambda = \frac{v''(y_0)}{v(y_0)}$  (puisque  $v(y_0) \neq 0$ ). Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $u''(x) + \lambda u(x) = 0$ . Cela donne alors,  $u''(x) = -\lambda u(x)$ , puis, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$-\lambda u(x)v(y) + u(x)v''(y) = u(x)(v''(y) - \lambda v(y)) = 0$$

Puisque  $u$  n'est pas la fonction nulle, il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $u(x_0) \neq 0$  et alors, pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $v''(y) - \lambda v(y) = 0$ .

**Q 6.** Réciproquement, s'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $u'' + \lambda u = 0$  et  $v'' - \lambda v = 0$ , alors  $\Delta f(x, y) = 0$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On distingue 3 cas :

—  $\lambda > 0$ . On note  $\lambda = \omega^2$ . On a alors, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$f(x, y) = (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)) \cdot (C \exp(\omega y) + D \exp(-\omega y))$$

où  $A, B, C$  et  $D$  sont des réels quelconques

—  $\lambda = 0$ ,

$$f(x, y) = (Ax + B)(Cy + D)$$

—  $\lambda = -\omega^2 < 0$ ,

$$f(x, y) = (A \cos(\omega y) + B \sin(\omega y)) \cdot (C \exp(\omega x) + D \exp(-\omega x))$$

### II.B - Coordonnées polaires

**Q 7.** On note

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) & \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{cases}$$

La fonction  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'ouvert  $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  à valeurs dans l'ouvert  $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Par composition avec  $f$ , l'application  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$ .

**Q 8.** On a, pour tout  $(r, \theta) \in U$ ,

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot (-r \sin(\theta)) + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot (r \cos(\theta))$$

**Q 9.** On redérive... on a (en abrégant l'écriture)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \cos(\theta) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \cos(\theta) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \sin(\theta) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \right) \\ &= \cos(\theta) \left( \cos(\theta) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) + \sin(\theta) \left( \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} &= \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

De même (ou presque car cette fois, il y a des termes en  $\theta$  à dériver) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} &= (-r \sin \theta) \left( (-r \sin \theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (r \cos \theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) - r \cos \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \\ &+ (r \cos \theta) \left( (-r \sin \theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (r \cos \theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) - r \sin \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \\ &= r^2 \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r^2 \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &- r \left( \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

**Q 10.** On a alors

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = r^2 \Delta f - r \frac{\partial g}{\partial r}$$

ou encore, pour tout  $(r, \theta) \in U$ ,

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) = r^2 ((\Delta f)(r \cos \theta, r \sin \theta))$$

Finalement  $f$  est dans  $\mathcal{H}(V)$  si et seulement si, pour tout  $(r, \theta) \in U$  (car  $r^2 \neq 0$ )

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) = 0$$

Puisque l'application  $\varphi$  est surjective, cela équivaut à dire que  $\Delta f$  est nulle sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

**Q 11.** La fonction  $g$  ne dépend donc que de  $r$ . Elle vérifie l'équation différentielle  $r^2 g''(r) + r g'(r) = 0$  ou encore  $g''(r) + \frac{1}{r} g'(r) = 0$ . La fonction  $g$  vérifie cette équation sur  $\mathbb{R}_+^*$  si et seulement si il existe  $A \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $r > 0$ ,  $g'(r) = A \exp(-\ln r) = \frac{1}{r}$  et il existe  $A, B \in \mathbb{R}$  tels que  $g(r) = A \ln r + B$ . On en déduit alors que  $f$  est solution si et seulement si il existe  $A, B \in \mathbb{R}$  tels que, pour tout  $(x, y) \in V$ ,  $f(x, y) = \frac{A}{2} \ln(x^2 + y^2) + B$ .

**Q 12.** On détermine  $A$  et  $B$  avec les équations  $A \ln r_1 + B = a$  et  $A \ln r_2 + B = b$ . Cela donne  $A = \frac{b-a}{\ln r_2 - \ln r_1}$  et  $B = \frac{a \ln r_2 - b \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1}$

## II.C - Variables polaires séparables

**Q 13.** si  $f$  n'est pas identiquement nulle, il existe  $r_0 > 0$  tel que  $u(r_0) \neq 0$ . On a alors, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $v(\theta) = \frac{1}{u(r_0)} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ . On en déduit que  $v(\theta + 2\pi) = v(\theta)$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ .

**Q 14.** On reporte les dérivées dans l'équation : cela donne, pour tout  $(r, \theta) \in U$ ,

$$r^2 u''(r) v(\theta) + r u'(r) v(\theta) + u(r) v''(\theta) = 0.$$

Il existe  $r_0 > 0$  tel que  $u(r_0) \neq 0$ , ce qui donne, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$v''(\theta) + \frac{1}{u(r_0)} (r_0^2 u''(r_0) + r_0 u'(r_0)) v(\theta) = 0$$

d'où l'équation différentielle  $z'' + \lambda z$  avec  $\lambda = \frac{1}{u(r_0)} (r_0^2 u''(r_0) + r_0 u'(r_0))$ . On a alors, pour tout  $(r, \theta) \in U$ ,

$$(r^2 u''(r) + r u'(r) - \lambda u(r)) v(\theta) = 0$$

Puisque  $f$  n'est pas nulle, il existe  $\theta_0$  tel que  $v(\theta_0) \neq 0$  et  $u$  est solution sur  $\mathbb{R}_+^*$  de

$$r^2 z''(r) + r z'(r) - \lambda z(r) = 0.$$

Ce n'est pas demandé, mais réciproquement, si  $u$  et  $v$  vérifient de telles équations (avec le même  $\lambda$ ) alors  $g(r, \theta) = u(r) v(\theta)$  est solution du problème.

### II.C.1) cas $\lambda = 0$

**Q 15.** La fonction  $z$  est affine. Elle est périodique si et seulement si elle est constante.

**Q 16.** On se retrouve dans la question 11.

**Q 17.** Les solutions sont toutes les fonctions  $g : (r, \theta) \mapsto A \ln r + B$  ou  $f : (x, y) \mapsto A \ln(x^2 + y^2) + B$  (le  $A$  dans  $f$  correspond à  $A/2$  dans  $g$ ).

### II.C.2) cas $\lambda \neq 0$

**Q 18.**

- si  $\lambda = -a^2 < 0$  (avec  $a > 0$ ), alors les solutions sont  $\theta \mapsto A e^{a\theta} + B e^{-a\theta}$  qui ne sont pas périodiques (sauf si  $A = B = 0$ ) : si  $A \neq 0$  alors la limite en  $+\infty$  et  $-\infty$  ce qui contredit la périodicité (et que cela entraîne que  $v$  est bornée). De même en  $-\infty$  avec  $B$ .
- On étudie le cas  $\lambda = \omega^2 > 0$ . On a alors  $v(\theta) = A \cos(\omega\theta) + B \sin(\omega\theta)$ . Cette fonction est de période  $2\pi$  si et seulement si  $2\pi\omega$  est un multiple entier de  $2\pi$  donc si  $\omega$  est dans  $\mathbb{Z}$ . Une condition nécessaire et suffisante pour que (II.2) admette des solutions non nulles et de période  $2\pi$  est que  $\lambda = n^2$  avec  $n \in \mathbb{Z}$  (en fait  $n \in \mathbb{N}$  suffit puisque  $\lambda = n^2$ ). Les solutions sont alors  $v(\theta) = A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)$  avec  $A, B$  deux réels quelconques (non tous nuls si on veut  $v \neq 0$ ).

**Remarque :** l'énoncé n'est pas très clair dans la suite... doit-on résoudre II.1 indépendamment du fait que  $\lambda$  doit s'écrire  $\lambda = n^2$  ou bien doit-on prendre en compte cette condition nécessaire et suffisante pour l'équation ?

**Q 19.** On s'intéresse à l'équation sur  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$r^2 z''(r) + r z'(r) - \lambda z(r) = 0$$

On note, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $Z(x) = z(\exp x)$ . Par composition, la fonction  $Z$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ . On a alors, pour tout  $r > 0$ ,  $z(r) = Z(\ln r)$ . On dérive :  $z'(r) = \frac{1}{r} Z'(\ln r)$  et  $z''(r) = -\frac{1}{r^2} Z'(\ln r) + \frac{1}{r^2} Z''(\ln r)$ . La fonction  $z$  est solution de II.1 sur  $\mathbb{R}_+^*$  si et seulement si

$$\forall r > 0, Z''(\ln r) - Z'(\ln r) + Z'(\ln r) - \lambda Z(\ln r) = 0,$$

ce qui donne,

$$\forall x \in \mathbb{R}, Z''(x) - \lambda Z(x) = 0.$$

- si  $\lambda = \alpha^2 > 0$  (avec  $\alpha > 0$ ) : cela donne des fonctions sous la forme  $Z(x) = C e^{\alpha x} + D e^{-\alpha x}$  où  $C$  et  $D$  sont des réels quelconques. La fonction  $z$  est solution sur  $\mathbb{R}_+^*$  si et seulement si il existe  $C, D \in \mathbb{R}$  tels que, pour tout  $r > 0$ ,

$$z(r) = C \exp(\alpha \ln r) + D \exp(-\alpha \ln r) = C r^\alpha + D r^{-\alpha}.$$

- si  $\lambda = -\alpha^2 < 0$  (avec  $\alpha > 0$ ) : cela donne des fonctions sous la forme  $Z(x) = C \cos(\alpha x) + D \sin(\alpha x)$  où  $C$  et  $D$  sont des réels quelconques. La fonction  $z$  est solution sur  $\mathbb{R}_+^*$  si et seulement si il existe  $C, D \in \mathbb{R}$  tels que, pour tout  $r > 0$ ,

$$z(r) = C \cos(\alpha \ln r) + D \sin(\alpha \ln r).$$

**Q 20.** on envisage les deux situations (toujours avec  $\alpha > 0$ ) :

- si  $\lambda = \alpha^2$ , alors la limite de  $z$  en 0 est finie si et seulement si  $D = 0$ . Les solutions qui se prolongent par continuité en 0 sont les fonctions  $x \mapsto C x^\alpha$ .
- si  $\lambda = -\alpha^2$ , il n'y a pas de limite finie en 0. C'est un peu plus embêtant à prouver. On choisit  $r$  tel que  $\alpha \ln r = -2k\pi$  (avec  $k \in \mathbb{N}$ , soit  $r_k = \exp(-2k\pi/\alpha)$  - ce terme tend vers 0 lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$  et  $z(r_k) = A$  donc la limite devrait être  $A$ . Avec un terme  $r_k = \exp((\pi - 2k\pi)/\alpha)$ , on obtient une limite  $-A$  donc  $A = 0$ . De même avec  $\alpha \ln r_k = \pm \frac{\pi}{2} - 2k\pi$ , on obtient des limites  $B$  ou  $-B$  donc  $B = 0$ . Finalement  $A = B = 0$ .

**Bilan :** si on cherche à mettre tout cela ensemble - les fonctions  $g$  solutions qui admettent une limite finie lorsque  $r$  tend vers 0 sont les fonctions

$$g : (r, \theta) \mapsto r^n (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))$$

pour  $n \in \mathbb{N}^*$  ainsi que les fonctions constantes (on a bien une limite nulle lorsque  $r$  tend vers 0 lorsque  $n \in \mathbb{N}^*$  et ce, indépendamment de  $\theta$ ).

### III Principe du maximum faible

#### III.A -

**Q 21.** L'ensemble  $\overline{U}$  est borné. En effet, il existe  $R > 0$  tel que  $U \subset \overline{D}(0, R)$ . Puisque le disque de droite est fermé, on a également  $\overline{U} \subset \overline{D}(0, R)$ . De plus  $\overline{U}$  est fermé donc finalement  $\overline{U}$  est compact (car fermé et borné dans un espace de dimension finie). La fonction  $f$  est continue sur ce compact donc  $f$  admet un maximum du  $\overline{U}$ .

**Q 22.** Supposons que  $x_0 \in U$ . Puisque  $U$  est ouvert, il existe  $r > 0$  tel que  $D(x_0, r) \subset U$ . Ainsi si  $|t| < r$ , alors  $x_0 + t e_i \in U$ . On peut alors s'intéresser à  $\varphi : t \mapsto f(x_0 + t e_i)$ . Cette fonction admet un maximum en 0. On a  $\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + t e_i)$  et  $\varphi''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0 + t e_i)$ . Puisque  $\varphi$  est maximal en 0, sa dérivée en 0 est nulle et sa dérivée seconde négative ou nulle. Ainsi  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) \leq 0$  et cela pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . On en déduit que  $\Delta f(x_0) \leq 0$  et donc une contradiction (on peut aussi le faire par l'absurde comme dans l'énoncé et montrer que si pour un certain  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$  alors  $\varphi$  est localement convexe et n'a pas de maximum en  $x_0$ ). La maximum  $M$  de  $f$  n'est donc pas atteint en un point de  $U$  - il est donc sur le bord de  $U$  et pour tout  $x \in U$ ,  $f(x) < M$  avec  $M = \sup_{y \in \partial U} f(y)$ .

#### III.B -

**Q 23.** On a  $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ . Ainsi  $x \mapsto f(x) + \varepsilon \|x\|^2$  est continue sur  $\overline{U}$ , de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$  et  $\Delta g_\varepsilon(x) = \Delta f(x) + 2n\varepsilon = 2n\varepsilon > 0$ .

**Q 24.** La fonction  $g_\varepsilon$  répond aux contraintes de la question précédente. Ainsi, pour tout  $x \in U$ ,

$$g_\varepsilon(x) < \sup_{y \in \partial U} g_\varepsilon(y),$$

c'est-à-dire

$$f(x) + \varepsilon \|x\|^2 < \sup_{y \in \partial U} g_\varepsilon(y)$$

Si on note  $M = \sup_{y \in \partial U} f(y)$  (qui existe puisque  $f$  est bornée sur  $\overline{U}$  donc aussi sur  $\partial U$ ) alors,

pour  $y \in \partial U$ , on a  $g_\varepsilon(y) \leq M + \varepsilon \|y\|^2$ . Puisque  $\overline{U}$  est borné, il existe  $K > 0$  tel que, pour tout  $y \in \partial U$ ,  $\|y\| \leq K$ . On a alors, si  $x \in U$ ,

$$f(x) + \varepsilon \|x\|^2 \leq M + \varepsilon K$$

et ceci est valable pour tout  $\varepsilon > 0$  ( $K$  et  $M$  ne dépendent pas de  $\varepsilon$ ). Lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, on obtient

$$f(x) \leq M = \sup_{y \in \partial U} f(y)$$

**Q 25.** On considère  $h = f_1 - f_2$ . Cette fonction est harmonique sur  $U$ , continue sur  $\bar{U}$ , nulle sur  $\partial U$  donc pour tout  $x \in U$ ,  $h(x) \leq 0$ . De même avec  $h = f_2 - f_1$ . On en déduit que  $h$  est nulle et que  $f_1 = f_2$ .

## IV Fonctions harmoniques et fonctions DSE

### IV.A -

**Q 26.** si on note  $z = x + iy$ , on sait que  $\sum a_n z^n$  converge absolument si  $|z| < R$  et que la série de fonctions associée converge normalement sur  $\bar{D}(0, r)$  pour tout  $r \in [0, R[$ .

- chaque fonction  $u_n : (x, y) \mapsto a_n(x + iy)^n$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $r \in [0, R[$  et  $\mathcal{D} = \bar{D}(0, r)$ . On a  $\|u_n\|_{\infty, \mathcal{D}} \leq |a_n r^n|$  donc  $\sum u_n$  converge normalement sur  $\mathcal{D}$  et la somme  $f$  est continue sur  $\mathcal{D}$ . Finalement  $f$  est continue sur  $D(0, R)$ .
- Pour la dérivation : on a un théorème de dérivation pour une variable. On va fixer  $y = y_0$  et s'intéresser à la dérivabilité de  $x \mapsto f(x, y_0)$ . Cette fonction est définie sur  $I = ]-\tilde{R}, \tilde{R}[$  où  $\tilde{R} = \sqrt{R^2 - y_0^2}$ . On note également  $v_n(x) = a_n(x + iy_0)^n$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , la série de fonctions  $\sum v_n$  converge simplement sur  $I$  et, pour tout  $x \in I$ ,  $v'_n(x) = n a_n(x + iy_0)^{n-1}$ . On fixe  $r < \tilde{R}$  et  $J = [-r, r]$ . Si  $|x| \leq r$  alors  $|x + iy_0| \leq r' = \sqrt{r^2 + y_0^2} < \sqrt{\tilde{R}^2 + y_0^2} = R$ . La série de fonctions  $\sum n a_n z^{n-1}$  converge normalement sur  $\bar{D}(0, r')$  et pour tout  $x \in J$ ,  $|v'_n(x)| \leq |n a_n|(r')^{n-1}$ . La série de fonctions  $\sum v'_n$  converge normalement sur  $J$ . On en déduit que  $x \mapsto f(x, y_0)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur tout  $[-r', r'] \subset I$  donc sur  $I$ , avec de plus,

$$\forall x \in ]-R', R'[ , \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n(x + iy_0)^{n-1}.$$

Finalement pour tout  $(x, y) \in D(0, R)$ , on a  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n(x + iy)^{n-1}$ . Comme précédemment, cette fonction (de deux variables) est continue sur  $D(0, R)$  (propriété de convergences de  $\sum n a_n z^{n-1}$ ).

- On montre la même chose sur  $\frac{\partial f}{\partial y}$  à la différence d'un facteur  $i$  dans la dérivée par rapport à  $y$ .

— On peut appliquer le résultat à  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  et obtenir que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $D(0, R)$ ... et ainsi de suite. On en déduit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $D(0, R)$  (et qu'on peut dériver terme à terme).

**Q 27.** On a  $\Delta f = \Delta u + i \Delta v$ . Si on montre que  $f$  est harmonique alors les parties réelle et imaginaire de  $\Delta f$  seront nulles donc  $u$  et  $v$  sont harmoniques sur  $D(0, R)$ . On a montré que pour tout  $(x, y) \in D(0, R)$ ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n(x + iy)^{n-2} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} i^2 n(n-1) a_n(x + iy)^{n-2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y).$$

On a bien  $\Delta f(x, y) = 0$  pour tout  $(x, y) \in D(0, R)$ .

### IV.B -

**Q 28.** Puisque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $D(0, R)$  et ne s'annule pas, la fonction  $1/f$  est également de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $D(0, R)$ . On a alors

$$\forall (x, y) \in D(0, R), \frac{\partial \left(\frac{1}{f}\right)}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{f^2(x, y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \text{ et } \frac{\partial \left(\frac{1}{f}\right)}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{f^2(x, y)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

Puisque  $\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$ , on obtient la même propriété pour  $1/f$ . La fonction  $1/f$  est donc harmonique que  $D(0, R)$ .

**Q 29.** On a  $f = u + iv$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}$  et  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ . La relation  $\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$  donne

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

On a alors  $\frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2} = u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  et un résultat similaire pour  $\frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2}$ . On obtient

$$\Delta(uv) = u \Delta v + v \Delta u + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

En utilisant les relations précédentes, on obtient  $\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}$  et ainsi  $\Delta(uv) = 0$ .

### IV.C -

**Q 30.** La fonction  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $D(0, R)$ . On a, pour tout  $(x, y) \in D(0, R)$ ,

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) - i \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) - i \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y),$$

ce qui donne

$$\frac{\partial h}{\partial y} - i \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - i \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - i \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = -i \Delta g = 0$$

On en déduit que  $h$  se développe en série entière sur  $D(0, R)$ .

**Q 31.** On procède comme indiqué. On vient de montrer que  $h$  est DSE sur  $D(0, R)$ . On a donc l'existence d'une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\forall (x, y) \in D(0, R), h(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x + iy)^n.$$

On note alors  $H(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (x + iy)^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} (x + iy)^n$ . On peut écrire  $H(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$ . On a, d'après les résultats précédents,

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x + iy)^n = h(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - i \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y),$$

ce qui donne  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ . On a également (puisque  $H$  est DSE - comme en Q29)  $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ , ce qui donne  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}$ . On a ainsi

$$\frac{\partial(u - g)}{\partial x} = \frac{\partial(u - g)}{\partial y} = 0,$$

et puisque  $D(0, R)$  est un ouvert connexe par arcs,  $g - u$  est constante. On en déduit qu'il existe  $C \in \mathbb{R}$  telle que  $g = u + C = \operatorname{Re}(H) + C$ .

#### IV.D -

**Q 32.** Puisque  $0 \leq r < R$ , on a  $f(r \cos t, r \sin t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int}$ . On note  $u_n(t) = a_n r^n e^{int}$ . On a, pour tout  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $|u_n(t)| \leq |a_n r^n|$  et  $\sum a_n r^n$  converge absolument. La série de fonctions  $\sum u_n$  converge normalement sur  $[0, 2\pi]$ . Puisque chaque fonction  $u_n$  est continue sur  $[0, 2\pi]$ , on peut permuter somme et intégrale et obtenir

$$\int_0^{2\pi} f(r \cos t, r \sin t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{int} dt.$$

Ces dernières intégrales sont nulles sauf pour  $n = 0$  avec une valeur  $2\pi$ . Il reste uniquement  $2\pi a_0 = 2\pi f(0, 0)$  d'où le résultat.

**Q 33.** Si  $g$  est harmonique, alors il existe  $H$  DSE sur  $D(0, R)$  telle que  $g = \operatorname{Re}(H)$ . On peut écrire

$$H(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(r \cos t, r \sin t) dt$$

En prenant la partie réelle,

$$g(0, 0) = \operatorname{Re}(H)(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\operatorname{Re}(H))(r \cos t, r \sin t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos t, r \sin t) dt.$$

**Q 34.** La fonction  $t \mapsto f(r \cos t, r \sin t)$  est périodique et continue sur  $\mathbb{R}$  donc bornée. Par inégalité triangulaire, on obtient la majoration.

**Q 35.** avec Q33

**Q 36.** Si la maximum est nul, il n'y a rien à faire. Sinon (on s'inspire de la démonstration du cas d'égalité de l'inégalité triangulaire pour les intégrales de fonctions à valeurs complexes) :

$$|f(0, 0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r \cos t, r \sin t)| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(0, 0)| dt = |f(0, 0)|$$

d'où uniquement des égalités et  $|f(0, 0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r \cos t, r \sin t)| dt$ . Par différence, on a

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r \cos t, r \sin t)| dt - |f(0, 0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f(r \cos t, r \sin t)| - |f(0, 0)|) dt = 0$$

Puisque  $t \mapsto |f(r \cos t, r \sin t)| - |f(0, 0)|$  est continue et négative sur  $[0, 2\pi]$ , la fonction est identiquement nulle. Ainsi  $|f|$  est constamment égal à  $|f(0, 0)|$ . On note  $f(0, 0) = a e^{i\theta}$  avec  $a = |f(0, 0)|$  et on s'intéresse à la fonction  $\tilde{f}$  définie par  $\tilde{f}(x, y) = f(x, y) e^{-i\theta_0}$  de sorte que  $|\tilde{f}(0, 0)| = a = \tilde{f}(0, 0)$ . La fonction est encore harmonique et vérifie donc, pour tout  $r \in [0, R]$ ,

$$\tilde{f}(0, 0) = a = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(r \cos t, r \sin t) dt,$$

avec  $|\tilde{f}| = a$ . En prenant la partie réelle, on obtient

$$a = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(\tilde{f})(r \cos t, r \sin t) dt,$$

avec  $|\operatorname{Re}(\tilde{f})| \leq |\tilde{f}| = a$ . On déduit comme au dessus que  $\operatorname{Re}(\tilde{f})$  est constante égale à  $a$  et que sa partie imaginaire est nulle. Ainsi  $\tilde{f}$  est constante et  $f$  également.

**Q 37.** on suppose que  $P$  n'a pas de racine complexe. On note  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ . Alors  $1/P$  est défini sur  $\mathbb{C}$ .

— étape 1 : on prouve que  $|1/P|$  admet un maximum sur  $\mathbb{C}$  : on a, pour  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$|P(z)| = |z^n| \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right|,$$

et on a  $\left| \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \leq \frac{|a_{n-1}|}{|z|} + \dots + \frac{|a_0|}{|z|^n}$ . La limite est nulle lorsque  $|z|$  tend vers  $+\infty$ . Il existe  $M > 0$  tel que, si  $|z| \geq M$ , alors  $\left| \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \leq \frac{|a_n|}{2}$  et ainsi

$$|P(z)| \geq \frac{|a_n|}{2} |z|^n \text{ et } \frac{1}{|P(z)|} \leq \frac{2}{|a_n| |z|^n}.$$

Il existe alors  $R > M$  tel que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  avec  $|z| > R$ ,  $\frac{1}{|P(z)|} \leq \frac{1}{2|a_0|}$ . Sur le compact  $\overline{D}(0, R)$ , la fonction continue  $z \mapsto \frac{1}{|P(z)|}$  admet un maximum en un certain  $z_0$ , supérieure à la valeur en  $z = 0$ , soit  $\frac{1}{|a_0|}$ . On en déduit que  $1/P$  est bornée sur  $\mathbb{C}$  et que le maximum de  $1/|P|$  existe et est atteint en  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

— On note  $Q(X) = P(z_0 + X)$  de sorte que  $1/Q$  est maximal en  $(0, 0)$ . Soit  $R > 0$ . Puisque  $h : (x, y) \mapsto Q(x + iy)$  est DSE sur  $D(0, R)$  et ne s'annule pas,  $1/h$  l'est aussi. De plus  $1/h$  est maximale en  $(0, 0)$  donc  $1/h$  est constant sur  $D(0, R)$  de valeur  $1/Q(0)$ . On en déduit que  $Q$  est le polynôme constant et  $P$  également.

## V Résolution du problème de Dirichlet dans le disque unité de $\mathbb{R}^2$

**Q 38.** On a

$$\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = \frac{2e^{it} + z - e^{it}}{e^{it} - z} = -1 + 2 \frac{e^{it}}{e^{it} - z} = -1 + 2 \frac{1}{1 - e^{-it}z}$$

et pour  $|ze^{-it}| = |z| < 1$ , on a

$$\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = -1 + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-int} z^n = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-int} z^n$$

Pour démontrer que  $g$  est harmonique, on peut montrer que c'est la partie réelle d'une fonction DSE. On s'intéresse alors à

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt.$$

On a, puisque  $h$  est à valeurs réelles,  $g(z) = \operatorname{Re}(F(z))$ . Il suffit donc de montrer que  $F$  est DSE sur  $D(0, R)$ .

On a alors (avec  $z = x + iy$ )

$$\begin{aligned} F(x + iy) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( h(t) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-int} z^n h(t) \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) dt + \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-int} z^n h(t) dt. \end{aligned}$$

On essaie de permuter. On pose  $u_n(t) = e^{-int} z^n h(t)$ . Puisque  $h$  est continue sur  $[0, 2\pi]$ , elle est bornée sur  $[0, 2\pi]$ . Il existe  $M$  telle que  $|h| \leq M$ . Alors, pour tout  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $|u_n(t)| \leq M|z|^n$ . Puisque  $|z| < 1$ , la série  $\sum |z|^n$  converge, si bien que  $\sum u_n$  converge normalement sur  $[0, 2\pi]$ . Les fonctions  $u_n$  étant continues, on peut écrire

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} h(t) dt \right) z^n.$$

et ainsi  $F$  est DSE sur  $D(0, R)$ . La fonction  $(x, y) \mapsto g(x + iy) = \operatorname{Re}(F(x + iy))$  est harmonique sur  $D(0, R)$ .

**Q 39.** On a

$$\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-int} z^n$$

On prouve comme dans la question précédente qu'on peut intégrer terme à terme, ce qui donne

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt = 2\pi + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_0^{2\pi} e^{-int} dt \right) z^n = 2\pi$$

car toutes les intégrales restantes sont nulles. On a donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt = 1$$

et en prenant la partie réelle,  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(t, z) dt = 1$ .

**Q 40.** la fonction intégrée est de période  $2\pi$  donc l'intégrale sur une période ne dépend pas du point de départ.

**Q 41.** en multipliant par le conjugué

$$\begin{aligned} \frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}} &= \frac{(e^{it} + re^{i\theta})(e^{-it} - re^{-i\theta})}{|e^{it} - re^{i\theta}|^2} = \frac{1 - r^2 + r(e^{i(\theta-t)} - e^{-i(\theta-t)})}{(\cos t - r \cos \theta)^2 + (\sin t + r \sin \theta)^2} \\ &= \frac{1 - r^2 + 2ir \sin(\theta - t)}{1 + r^2 - 2r(\cos t \cos \theta - \sin t \sin \theta)} \end{aligned}$$

ce qui donne en partie réelle,

$$\mathcal{P}(t, re^{i\theta}) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2}$$

**Q 42.** on commence par effectuer le changement de variable «  $u = t - \varphi$  ». On a

$$\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z) dt = \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \mathcal{P}(u + \varphi, z) du.$$

Or

$$\mathcal{P}(u + \varphi, z) = \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i(u+\varphi)} + z}{e^{i(u+\varphi)} - z} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{e^{iu} + ze^{-i\varphi}}{e^{iu} - ze^{-i\varphi}} \right) = \mathcal{P}(u, ze^{-i\varphi}).$$

On a donc

$$\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z) dt = \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \mathcal{P}(u, z') du.$$

avec  $z' = ze^{-i\varphi}$ . Faire tendre  $z$  vers  $e^{i\varphi}$  revient à faire tendre  $z'$  vers 1. On cherche par conséquent à montrer que

$$\lim_{z \rightarrow 1} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z) du = 0$$

Avec  $z = re^{i\theta}$ , cela revient à faire tendre  $r$  vers 1 et  $\theta$  vers 0. À  $t$  fixé dans  $[\delta, 2\pi - \delta]$ , on a  $1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2$  qui va tendre vers  $2 - 2 \cos(\theta) \neq 0$  et  $1 - r^2$  vers 0. On essaie de permuter limite et intégrale : on note

$$w(r, \theta) = \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, re^{i\theta}) du$$

et on s'intéresse à  $\lim_{(r, \theta) \rightarrow (1, 0)} w(r, \theta)$ .

- on peut le faire par permutation limite et intégrale (à  $t$  fixé dans  $[\delta, 2\pi - \delta]$ , on a  $\lim_{(r, \theta) \rightarrow (1, 0)} \mathcal{P}(t, re^{i\theta}) = 0 = \psi(t)$ . La fonction  $\psi$  est continue sur  $[\delta, 2\pi - \delta]$ . La phase sensible est la domination indépendante des paramètres - l'idée est que  $\theta$  se rapproche de 0 et que  $t$  est suffisamment loin de 0 et de  $2\pi$ ...
- on peut essayer de majorer puisqu'on peut factoriser par  $1 - r^2$  :

$$w(r, \theta) = (1 - r^2) \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{1}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2} du$$

Le dénominateur ne s'annule que si  $\cos(t - \theta) = 1$  et  $r = 1$ . Puisque  $t - \theta$  est suffisamment loin d'un multiple entier de  $2\pi$ . Cela n'arrivera pas. On peut choisir que  $\theta \in [-\delta/2, \delta/2]$  ainsi  $t - \theta \in [\delta/2, 2\pi - \delta/2]$  et  $\cos(t - \theta) \leq \cos(\delta/2)$ . On a alors

$$1 + r^2 - 2r \cos(t - \theta) \geq 1 + r^2 - 2r \cos(\delta/2) > 0$$

et enfin pour  $|\theta| < \delta/2$ ,

$$|w(r, \theta)| \leq \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\delta/2) + r^2} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} dt \leq 2\pi \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\delta/2) + r^2}$$

de limite nulle lorsque  $r$  tend vers 1 (et  $\theta$  vers 0 en restant dans  $[-\delta/2, \delta/2]$ ).

**Q 43.** Afin de relier  $g(z)$  et  $h(\varphi)$ , on écrit pour  $|z| < 1$  (avec la question Q39),

$$h(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} h(\varphi) \mathcal{P}(t, z) dt$$

et ainsi

$$g(z) - h(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} (h(t) - h(\varphi)) \mathcal{P}(t, z) dt$$

Cette intégrale se découpe en deux : les valeurs de  $t$  pour lesquelles  $t - \varphi$  est petit et le reste.

Soit  $\varepsilon > 0$ . Par continuité uniforme de  $h$  sur  $\mathbb{R}$  (puisque  $h$  est  $2\pi$  périodique et continue sur  $\mathbb{R}$ ), il existe  $\delta > 0$  tel que, pour  $|x - y| \leq \delta$ , on a  $|h(x) - h(y)| < \varepsilon$ . On fixe un tel  $\delta$  avec de plus  $\delta < \pi$  (on peut toujours baisser la valeur de  $\delta$ ). On a alors

$$\begin{aligned} g(z) - h(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} (h(t) - h(\varphi)) \mathcal{P}(t, z) dt \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi}^{\varphi+\delta} (h(t) - h(\varphi)) \mathcal{P}(t, z) dt \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi+2\pi-\delta}^{\varphi+2\pi} (h(t) - h(\varphi)) \mathcal{P}(t, z) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} (h(t) - h(\varphi)) \mathcal{P}(t, z) dt \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} (h(t) - h(\varphi)) \mathcal{P}(t, z) dt \end{aligned}$$

par périodicité et en regroupant les deux dernières intégrales par relation de Chasles. On peut majorer séparément. On note  $M$  la borne supérieure de  $h$  sur  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} (h(t) - h(\varphi)) \mathcal{P}(t, z) dt \right| &\leq \frac{2M}{2\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} |\mathcal{P}(t, z)| dt \\ &= \frac{M}{\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z) dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} (h(t) - h(\varphi)) \mathcal{P}(t, z) dt \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} |h(t) - h(\varphi)| \mathcal{P}(t, z) dt \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} \mathcal{P}(t, z) dt \\
 &\leq \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(t, z) dt = \varepsilon,
 \end{aligned}$$

de nouveau en utilisant la périodicité et le caractère positif de  $\mathcal{P}$  (on intègre sur un intervalle  $[\varphi - \delta, \varphi + \delta]$  de largeur  $2\delta$  inférieure à  $2\pi$ ).

Tout cela donne

$$|g(z) - h(\varphi)| \leq \frac{M}{\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z) dt + \varepsilon.$$

**Q 44.** L'unicité a été faite en Q25. On vérifie que la fonction  $f$  où  $f = g$  sur  $D(0, 1)$  et  $f(\cos t, \sin t) = h(t)$  est la solution du problème :

- d'après Q38,  $g$  est harmonique sur  $D(0, 1)$  donc  $f$  également,
- par définition la condition au bord est vérifiée,
- il reste à prouver que  $f$  est continue sur  $\overline{D}(0, 1)$  et pour cela que, pour tout  $\varphi \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{z \rightarrow e^{i\varphi}} f(z) = h(\varphi)$ . On fixe  $\varphi \in \mathbb{R}$  et  $\delta > 0$  comme précédemment. C'est un peu plus délicat que simplement utiliser Q43 car on manipule  $f(z)$  avec  $|z| \leq 1$  cette fois. Il faut distinguer deux situations :

- si  $|z| < 1$ , d'après la question Q42,  $\lim_{z \rightarrow e^{i\varphi}} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z) dt = 0$ . Il existe donc  $\alpha_1 > 0$  tel que si  $|z| < 1$  et  $|z - e^{i\varphi}| < \alpha_1$  alors

$$\frac{M}{\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z) dt < \varepsilon \text{ et } |g(z) - h(\varphi)| < 2\varepsilon.$$

- si  $|z| = 1$  : par continuité de  $h$  en  $\varphi$ , il existe  $\alpha_2 > 0$  tel que  $|t - \varphi| < \alpha_2$  donne  $|h(t) - h(\varphi)| = |f(e^{it}) - h(\varphi)| < \varepsilon$ .

Si on prend  $z$  tel que  $|z| \leq 1$  et  $|z - e^{i\varphi}| < \alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ , alors  $|f(z) - f(e^{i\varphi})| = |f(z) - h(\varphi)| < 2\varepsilon$ . On a prouvé la continuité de  $f$  en tout point du cercle unité, ce qui était la dernière propriété manquante... on a donc prouvé que  $f$  est solution du problème de Dirichlet!!!