Exercice : développement en série entière

Q1.

a/ On le prouve par récurrence sur n. La propriété est vérifiée pour $n=0$ avec $P_0=1$. S'il elle est vraie pour un certain entier $n\in\mathbb{N}$, alors, pour tout $x\in I$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{\cos(x)P_n'(\sin x)(\cos x)^{n+1}+(n+1)(\sin x)(\cos x)^n P_n(\sin x)}{(\cos x)^{2n+2}} \\ &= \frac{\cos(x)P_n'(\sin x)(\cos x)+(n+1)(\sin x)P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}} \end{aligned}$$

d'où $f^{(n+1)}(x)=\dfrac{(1-\sin^2 x)P_n'(\sin x)+(n+1)(\sin x)P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}=\dfrac{P_{n+1}(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}$ avec

$$P_{n+1}=(1-X^2)P_n'+(n+1)XP_n.$$

b/ fait avant : $P_{n+1}=(1-X^2)P_n'+(n+1)XP_n$

c/ $P_0=1$, $P_1=X$ et $P_2=(1-X^2)+2X^2=X^2+1$

d/ Visiblement P_n est de degré n. On le prouve par récurrence. On a $P_n=a_nX^n+Q_n$ avec $\deg Q_n<n$, ce qui donne $P_{n+1}=(n+1)a_nX^{n+1}-na_nX^2X^{n-1}+\cdots=a_nX^{n+1}+\cdots$ (les $\cdots$ étant des termes de degré au plus n). Par récurrence P_n est de degré n et unitaire.

e/ P_0 et P_2 sont pairs, P_1 est impair. On devrait avoir P_n de même parité que n. Pour le faire en une seule fois, on prouve ar récurrence que $P_n(-X)=(-1)^nP_n(X)$. C'est vérifié pour $n=0,1$ et 2. Si la propriété est vraie pour un entier n alors $P_n(-X)=(-1)^nP_n(X)$ et, en dérivant, $-P_n'(-X)=(-1)^nP_n'(X)$. On a alors

$$\begin{aligned} P_{n+1}(-X) &= (1-(-X)^2)P_n'(-X)+(n+1)(-X)P_n(-X) \\ &= -(-1)^n(1-X^2)P_n'(X)-(n+1)(-1)^nXP_n(X) \\ &= (-1)^{n+1}((1-X^2)P_n'(X)+(n+1)XP_n(X)) \\ &= (-1)^{n+1}P_{n+1}(X). \end{aligned}$$

On peut aussi remarquer de $f^{(n)}$ est de même parité que n, ce qui donne, pour tout $x\in I$, $P_n(\sin(-x))=(-1)^nP_n(\sin x)$ et ainsi, pour tout $u\in]-1,1[$, $P_n(-u)=(-1)^nP_n(u)$. Puisque $]-1,1[$ est un ensemble infini, on a $P_n(-X)=(-1)^nP_n(X)$.

Q2.

a/ On le prouve par récurrence : on suppose que $P_n=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ avec $a_k\in\mathbb{N}$. On a alors

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n}ka_kX^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}ka_kX^{k+1}+\sum_{k=0}^{n}(n+1)a_kX^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}ka_kX^{k-1}+(n+1)a_0X+\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a_kX^{k+1}. \end{aligned}$$

et tous les coefficients sont des entiers positifs.

b/ D'après la relation de récurrence, $P_{n+1}(1)=(n+1)P_n(1)$. On montre par récurrence que $P_n(1)=n!$.

Q3. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, donc, pour tout $x\in I$,

$$f(x)=S_n(x)+\frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt.$$

On effectue le changement de variable « $t=x(1-u)$ », avec $u\in[0,1]\mapsto x(1-u)\in[0,x]$, $\mathscr{C}^1$ et bijective si $x\neq0$. Cela donne, pour $x\neq0$,

$$f(x)=S_n(x)+\frac{1}{n!}\int_1^0(xu)^nf^{(n+1)}(x(1-u))\,(-du)=S_n(x)+\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1u^nf^{(n+1)}(x(1-u))\,du.$$

Q4. On s'intéresse à la série $\sum a_nx^n$ pour $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$ (afin d'avoir des termes toujours positifs). On a $x(1-u)\in[0,x]\subset[0,\frac{\pi}{2}[$. Donc $\sin(x(1-u))\geqslant0$ et, puisque P_n est à coefficients positifs, $P_n(t)\geqslant0$ si $t\geqslant0$. Ainsi, pour tout $u\in[0,1]$, $f^{(n+1)}(x(1-u))\geqslant0$ et par conséquent $R_n(x)\geqslant0$. On peut en déduire que $S_n(x)=f(x)-R_n(x)\leqslant f(x)$ si $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$. La série $\sum a_nx^n$ est à termes positifs donc la suite $S_n(x)$ est croissante majorée donc converge.

Q5.

a/ On a, pour $x\in[0,\pi/2[$, $\dfrac{R_n(x)}{x^{n+1}}=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1u^nf^{(n+1)}(x(1-u))\,du$. On veut montrer que cette quantité est croissante par rapport à x. La dérivée de $f^{(n+1)}$ est $f^{(n+2)}$ qui est positive sur $[0,\frac{\pi}{2}[$. Si $0<x<y<\frac{\pi}{2}$, alors, pour tout $u\in[0,1]$, on a $x(1-u)\leqslant y(1-u)$ et $u^nf^{(n+1)}(x(1-u))\leqslant u^nf^{(n+1)}(y(1-u))$. En intégrant, on obtient $\dfrac{R_n(x)}{x^{n+1}}\leqslant\dfrac{R_n(y)}{y^{n+1}}$ et ainsi $R_n(x)\leqslant\left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1}R_n(y)$. La relation est également vraie si $x=0$ puisque le reste $R_n(0)$ est toujours nul.

b/ Puisque $S_n(y)\geqslant0$ et $f(y)=S_n(y)+R_n(y)$, on a bien $R_n(y)\leqslant f(y)$.

Q6. Par parité, on a $a_{2k+1}=0$ si $k\in\mathbb{N}$. Pour tout $x\in[0,\pi/2[$, on a $f(x)=S_n(x)+R_n(x)$. On fixe $x\in[0,\pi/2[$. Il existe y tel que $x<y<\frac{\pi}{2}$. On a alors $0\leqslant R_n(x)\leqslant\left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1}f(y)$ et cette dernière suite tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Finalement, $\lim_{n\to+\infty}R_n(x)=0$, si bien que $f(x)=\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_{2k}x^{2k}$. Puisque f est paire et que la somme de la série entière aussi, le deux coincident sur I.

Q7.

a/ Par propriété sur les séries entières, si $|x|<\frac{\pi}{2}$, alors $a_{2k}x^{2k}$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$. C'est le cas pour $x=1$.

b/ De même, puisque $0 \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, on a $\left(a_{2k}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)^{2k}\right)$ bornée

c/ On a $0 \leqslant \sqrt{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$.

PROBLÈME - Intégrales de Fresnel (d'après CCINP 2022)

Partie I - Intégrales fonctions de leur borne

Q1. La fonction $f : t \longmapsto e^{it^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, H est la primitive sur$\mathbb{R}$ de f nulle en 0, H est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in$ œ$\mathbb{R}$, $H'(x) = f(x) = e^{ix^2}$. Puisque f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que H' et donc H sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Q2. On a $H(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} e^{it^2}\mathrm{d}t$. On effectue le changement de variable linéaire « $t = -u$ », ce qui donne $H(-x) = -\displaystyle\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$ donc $H(-x) = -H(x)$. La fonction H est impaire sur $\mathbb{R}$.

Q3. Pour tout $z \in \mathbb{C}, e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$. On a donc pour tout $t \in \mathbb{R} : e^{it^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} i^n\frac{t^{2n}}{n!}$. La fonction f est développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence infini. Par théorème d'intégration sur les séries entières,

$$\forall x \in \mathbb{R} : H(x) - H(0) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{n!}.$$

La fonction H est donc elle aussi développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence infini.

Q4. Soit $x > 0$. On utilise le changement de variable « $t = \sqrt{u}$ » : l'application $u \mapsto \sqrt{u}$ est $\mathscr{C}^1$ et bijective de $]0, x^2]$ sur $]0, x]$. On obtient :

$$H(x) = \frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u.$$

Q5. Soit $x > \sqrt{2\pi}$: on effectue une intégration par parties :les fonctions $u \mapsto e^{iu}$ et $u \mapsto \frac{1}{u^{3/2}}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[2\pi, x^2\right]$ et ainsi

$$\begin{aligned} H(x) - H(\sqrt{2\pi}) &= \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{x^2}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{iu}}{i\sqrt{u}}\right]_{2\pi}^{x^2} - \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{x^2}\frac{-e^{iu}}{2iu^{3/2}}\mathrm{d}u \\ &= -\frac{i}{2x}e^{ix^2} + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4}\int_{2\pi}^{x^2} u^{-\frac{3}{2}}e^{iu}\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Q6. On a $\left|u^{-\frac{3}{2}}e^{iu}\right| = \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$ et la fonction $u \mapsto \frac{1}{u^{3/2}}$ est intégrable sur $[2\pi, +\infty[$. La fonction $u \mapsto \frac{e^{iu}}{u^{3/2}}$ est donc intégrable sur $[2\pi, +\infty[$ et la fonction $v \mapsto \displaystyle\int_{2\pi}^{v}\frac{e^{iu}}{u^{3/2}}\mathrm{d}u$ admet une limite finie en $+\infty$. Par composition avec $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \displaystyle\int_{2\pi}^{x^2} u^{-\frac{3}{2}}e^{iu}\mathrm{d}u$ admet une limite finie lorsque $x \to +\infty$. De plus $\left|-\frac{i}{2x}e^{ix^2}\right| = \frac{1}{2x}$ qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. On a par conséquent l'existence d'une limite finie pour H en $+\infty$

Partie II - Calcul des intégrales de Fresnel

Q7. On a : $\left|e^{-x^2(t^2-i)}\right| = \left|e^{-x^2t^2}\right| \times \left|e^{ix^2}\right| = e^{-x^2t^2}$ et $\left|t^2 - i\right| = \sqrt{\left(t^2\right)^2 + 1^2} = \sqrt{t^4+1}$.

Q8. Pour $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \longmapsto f(x,t) = \dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour $t \geqslant 0$, $|f(x,t)| = \dfrac{e^{-x^2t^2}}{\sqrt{t^4+1}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$. On note $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$, paire et $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}$ par parité. On a donc

- pour $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ où φ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de continuité des intégrale à paramètre, on en déduit que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Q9. Soit $(x_n)_n$ une suite divergente vers $+\infty$. On a

$$|g(x_n)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-x_n^2t^2}}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$$

On note $f_n(t) = \dfrac{e^{-x_n^2t^2}}{\sqrt{1+t^4}}$. On a

- si $t \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 1$. La fonction limite simple est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = 0$$

Par majoration, $\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = 0$. Cela étant vrai pour toute suite de limite $+\infty$, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et de même pour la limite en $+\infty$ par parité.

Remarque : on a suivi l'énoncé mais on peut directement appliquer un théorème de convergence dominée sur la variable x qui tend vers $+\infty$ sans passer par une suite quelconque de limite infinie.

Q10. Puisque g est paire, on montre le caractère $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $b \geqslant a > 0$

- Pour $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$
- Pour $x \in [a,b]$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$
- Pour $x \in [a,b]$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(t^2-i)}$ est continue sur $\mathbb{R}$
- pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [a,b]$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2be^{-a^2t^2}$. Et $2be^{-a^2t^2} \underset{t\to\pm\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto 2be^{-a^2t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On peut donc appliquer le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale et on obtient que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et cela pour tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Ainsi g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc sur $\mathbb{R}^*$ par parité avec de plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -2x\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2(t^2-i)}\mathrm{d}t = -2xe^{ix^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2t^2}\mathrm{d}t$$

Q11. Pour $x > 0$ grâce au changement de variable linéaire « $u = xt$ » :

$$g'(x) = -2e^{ix^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2}$$

Q12. On obtient

$$\frac{1}{X^2-i} = \frac{1}{(X-e^{i\pi/4})(X+e^{i\pi/4})} = \frac{e^{-i\pi/4}}{2}\left(\frac{1}{X-e^{i\pi/4}} - \frac{1}{X+e^{i\pi/4}}\right).$$

Ensuite

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\mathrm{d}u \quad \left(\text{en posant } u = t-\frac{\sqrt{2}}{2}, \mathrm{d}u = \mathrm{d}t\right)\\ &= \left[\sqrt{2}\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}u)\right]_{u\to-\infty}^{u\to+\infty}\\ &= \pi\sqrt{2}\end{aligned}$$

Par le changement de variable $u = -t$, on obtient

$$dint_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u^2-\sqrt{2}u+1}\mathrm{d}u = \pi\sqrt{2}.$$

On fait attention de ne pas intégrer directement les fonctions $t \mapsto \dfrac{2t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1}$ et l'autre en échangeant les signes sur $\mathbb{R}$ car les intégrales sont divergentes. On doit les laisser ensemble :

$$\begin{aligned}\int_A^B \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} - \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\mathrm{d}t &= \left[\ln\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right) - \ln\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)\right]_A^B\\ &= \left[\ln\left(\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right)\right]_A^B\end{aligned}$$

Lorsque A et B tendent respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$, on obtient une limite nulle. Finalement

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2-i} = \frac{1-i}{4}\times(0+2i\pi\sqrt{2}) = (1+i)\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

Q13. Pour $x > 0$:

$$g(x)-g(0) = \int_0^x g'(t)\mathrm{d}t = -2\sqrt{\pi}\int_0^x e^{it^2}\mathrm{d}t = -2\sqrt{\pi}H(x)$$

ce qui donne bien

$$g(x) = (1+i)\frac{\pi\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{\pi}H(x)$$

Lorsque $x \to +\infty$:

$$0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\pi - 2\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty} e^{it^2}\mathrm{d}t$$

On a donc $\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1+i}{2\sqrt{2}}\sqrt{\pi}$.
En prenant les parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Partie III - Etude d'une série de fonctions

Q14. On a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} a_n(b_n - b_{n-1}) &= \sum_{n=1}^{N} a_n b_n - \sum_{n=1}^{N} a_n b_{n-1} = \sum_{n=1}^{N} a_n b_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} b_n \\ &= \sum_{n=1}^{N} a_n b_n - \left(a_1 b_0 + \sum_{n=1}^{N} a_{n+1} b_n - a_{N+1} b_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{n+1}) b_n - a_1 b_0 + a_{N+1} b_N.\end{aligned}$$

On a alors $|(a_n - a_{n+1})b_n| \leqslant M|a_{-}a_{n+1}| = M(a_n - a_{n+1})$ par décroissante de la suite (a_n) (avec M un majorant de la suite $|b|$). La série télescopique $\sum(a_n - a_{n+1})$ converge puisque la suite (a_n) converge. Ainsi $\sum(a_n - a_{n+1})b_n$ converge absolument. On a également $|a_{N+1}b_N| \leqslant Ma_{N+1}$ de limite nulle. On en déduit l'existence d'une limite finie pour chaque terme lorsque N tend vers $+\infty$. Finalement $dsum_{n=1}^{N} a_n(b_n - b_{n-1})$ admet une limite finie lorsque $N \to +\infty$.

Q15. Soient $x \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $e^{ix} \neq 1$ et on a

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=1}^{n} \left(e^{ix}\right)^k = e^{ix}\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1} = e^{ix}\frac{e^{inx/2}}{e^{ix/2}}\frac{e^{inx/2} - e^{-inx/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Q16. Soit $x \in]0, 2\pi[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $b_n = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx}$. On pose aussi $b_0 = 0$.
Alors (a_n) est décroissante positive de limite nulle et (b_n) est bornée puisque :

$$\forall n \geqslant 1, |b_n| \leqslant \frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

La série $\sum a_n (b_n - b_{n-1}) = \sum \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$ est donc convergente. Ainsi S est définie sur $]0, 2\pi[$.

Q17. Dans les questions précédentes, on a justifié l'existence (fonction H) de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$. À l'aide du changement linéaire « $u = xt$, on obtient l'existence de l'intégrale demandée.

Q18. On a :

$$\begin{aligned}\frac{e^{ix}-1}{ix}S(x) - \int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t &= \frac{e^{ix}-1}{ix}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{ikx}}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\left|\frac{e^{ix}-1}{ix}S(x) - \int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{3/2}}$$

on note $C = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{3/2}}$ (série de Riemann convergente) et on obtient le résultat demandé.

Q19. Si $x > 0$ le changement de variable « $u = xt$ » donne $I(x) = \int_x^{+\infty}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$. On a démontré que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ convergeait. On en déduit

$$I(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} e^{it^2}\mathrm{d}t = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Q20. On a $\frac{e^{ix}-1}{ix} = \frac{1}{i}\frac{\cos(x)-1}{x} + i\frac{\sin(x)}{x}$ donc $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ix}-1}{ix} = 1$.

$$\left|\frac{e^{ix}-1}{ix}S(x) - \int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}dt\right| \leqslant C$$

On en déduit

$$\left|\sqrt{x}\frac{e^{ix}-1}{ix}S(x) - I(x)\right| \leqslant C\sqrt{x}$$

En faisant tendre x vers 0 , on en déduit que $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}S(x) = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et ainsi

$$S(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$