Exercice : développement en série entière

Pour tout x réel dans l'intervalle ouvert $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on pose : $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$. La dérivée d'ordre n de f en x est ici notée $f^{(n)}(x)$, avec la convention $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Q1. a/ Prouver l'existence et l'unicité d'un polynôme P_n tel que : $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{(\cos(x))^{n+1}}$.

b/ Donner une relation entre P_{n+1}, P_n et P'_n.

c/ Préciser P_0, P_1 et P_2.

d/ Déterminer le monôme de plus haut degré de P_n.

e/ Examiner la parité du polynôme P_n.

Q2. a/ Montrer que les coefficients du polynôme P_n sont des entiers positifs ou nuls.

b/ Que vaut $P_n(1)$?

Q3. On pose $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$. Pour tout $x \in I$, justifier la formule :

$$f(x) = S_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x(1-u))\, du.$$

Q4. Prouver que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$

Q5. a/ Pour tous $0 \leqslant x < y < \frac{\pi}{2}$, prouver que : $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$.

b/ Prouver également que : $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$.

Q6. En déduire que, pour tout $x \in I$, on a : $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k}$.

Q7. a/ Démontrer que la suite (a_{2k}) tend vers 0.

b/ Pour tout $\varepsilon \in]0; \frac{\pi}{2}[$, montrer l'existence d'une constante $M_\varepsilon > 0$ telle que :

$$0 \leqslant a_{2k} \leqslant M_\varepsilon \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)^{-2k}.$$

c/ Montrer que la suite $(a_{2k} 2^k)$ est bornée.

PROBLÈME - Intégrales de Fresnel (d'après CCINP 2022)

Dans ce problème, on étudie certaines intégrales et séries numériques reliées aux intégrales dites de Fresnel.

Partie I - Intégrales fonctions de leur borne

Dans cette partie, on définit la fonction H par l'expression $H(x) = \int_0^x e^{it^2}\mathrm{d}t$, où e^{it^2} signifie $\exp\left(it^2\right)$.

Q1. Démontrer que H est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de $H'(x)$.

Q2. Étudier la parité de la fonction H.

Q3. Démontrer que la fonction $t \mapsto e^{it^2}$ est développable en série entière au voisinage de 0. En déduire un développement en série entière de la fonction H au voisinage de 0 , en précisant l'intervalle sur lequel ce développement est valable.

Q4. Si $x > 0$, démontrer que :

$$H(x) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$$

Q5. Pour $x > \sqrt{2\pi}$, en déduire que :

$$H(x) - H(\sqrt{2\pi}) = -i\frac{e^{ix^2}}{2x} + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4}\int_{2\pi}^{x^2} u^{-\frac{3}{2}} e^{iu}\mathrm{d}u.$$

Q6. En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{it^2}\, dt$ converge.

Partie II - Calcul des intégrales de Fresnel

Dans cette partie, on étudie la fonction g d'expression :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2 - i}\mathrm{d}t$$

Pour cela, on pose $f(x,t) = \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$.

Q7. Si $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, déterminer les modules des nombres complexes $e^{-x^2(t^2-i)}$ et $t^2 - i$.

Q8. Démontrer que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser un argument de parité).

Q9. Soit $(x_n)_n$ une suite divergente vers $+\infty$. A l'aide du théorème de convergence dominée, démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = 0$. En déduire la limite de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

Q10. Démontrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Q11. On admet dans cette question que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et est égale à $\sqrt{\pi}$.

Vérifier que :

$$\forall x>0,\quad g'(x) = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2}$$

Q12. Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^2-i}$.

On admet ensuite que :

$$\frac{1}{X^2-i} = \frac{1-i}{4}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2X-\sqrt{2}}{X^2-X\sqrt{2}+1}+\frac{i}{X^2-X\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2X+\sqrt{2}}{X^2+X\sqrt{2}+1}+\frac{i}{X^2+X\sqrt{2}+1}\right)$$

Démontrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t = \pi\sqrt{2}$. Donner la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t$ puis déterminer la valeur de $g(0)$.

Q13. En déduire que :

$$\forall x>0,\quad g(x) = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\pi}\times H(x)$$

où la fonction H a été introduite dans la partie I.

Donner ensuite les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t$, de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t$.

Partie III - Étude d'une série de fonctions

Dans cette partie, on étudie la fonction S d'expression :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$$

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction d'expression $f_n(x) = \dfrac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$.

Q14. On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle positive décroissante de limite nulle et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. Après avoir justifié l'identité suivante :

$$\forall N\in\mathbb{N}^*,\quad \sum_{n=1}^{N} a_n(b_n-b_{n-1}) = \sum_{n=1}^{N}(a_n-a_{n+1})\,b_n + a_{N+1}b_N - a_1 b_0$$

démontrer que la série $\sum a_n(b_n-b_{n-1})$ converge.

Q15. Soient $x\in]0,2\pi[$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Démontrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\times\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Q16. A l'aide des deux questions précédentes, démontrer que S est définie sur $]0,2\pi[$.

Q17. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{ixt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Q18. On admet que (vous pouvez essayer de le démontrer) si $k\in\mathbb{N}^*$ et $x\in]0,2\pi[$:

$$\left|\frac{e^{i(k+1)x}-e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}}$$

Démontrer qu'il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $x\in]0,2\pi[$:

$$\left|\frac{e^{ix}-1}{ix}S(x) - \int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right| \leq C$$

Q19. Déterminer la limite, quand x tend vers 0^+, de :

$$I(x) = \sqrt{x}\int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Q20. Déterminer la limite en 0^+ de la fonction $x\mapsto\dfrac{e^{ix}-1}{ix}$. Donner alors un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+.