Corrigé de l'épreuve de mathématiques B X MP 2018 Annulée

Les commentaires et détections de coquille, de maladresse ou d'erreur sont les bienvenus : n'hésitez pas à m'écrire à l'adresse `varjabedian.serge@bbox.fr`

Partie I.

1. (a) Si $x'(s)$ alors x est solution d'un problème de Cauchy dont la fonction nulle est solution et le théorème d'unicité de Cauchy prouve que $x = 0$ ce qui est absurde donc $x'(s) \neq 0$

   (b) Si α est un zéro de x alors vu 1a, $x'(\alpha) \neq 0$, or $x'(\alpha) = \lim_{\substack{t\to\alpha \\ t\neq\alpha}} \frac{x(t)-x(\alpha)}{t-\alpha} = \lim_{\substack{t\to\alpha \\ t\neq\alpha}} \frac{x(t)}{t-\alpha}$, on en déduit que pour t au voisinage de α avec $t \neq \alpha$ on a $x(t) \neq 0$ ce qui prouve que α est un zéro isolé. Si $\mathcal{Z}$ est un ensemble infini alors nous pouvons construire une suite d'éléments $(t_n)_n$ de $\mathcal{Z}$ deux à deux distincts, cette suite étant bornée possède une suite extraite $(t_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers un élément α. Comme $x(t_{\varphi(n)}) = 0$, par continuité de la fonction x on obtient par passage à la limite que $x(\alpha) = 0$ ainsi $\alpha \in \mathcal{Z}$, ce qui est absurde car α n'est pas un point isolé puisque tout voisinage de α contient une infinité de termes de la suite $(t_{\varphi(n)})_n$ qui sont deux à deux distincts.

2. On conserve les notations de l'énoncé.

   (a) comme les fonctions x et y sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, la fonction w est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, et pour tout $t \in [0,1]$, $w'(t) = y(t)x''(t) - y''(t)x(t) = (p(t) - q(t))x(t)y(t)$. On en déduit que $w' > 0$ sur $[0,1]$, la fonction w est donc strictement croissante sur $[a_j, a_{j+1}]$ et par conséquent $w(a_{j+1}) > w(a_j)$. La question 1a prouve que $x'(a_j)$ et $x'(a_{j+1})$ sont non nuls, en particulier la fonction x est localement strictement monotone sur un voisinage de a_j et de a_{j+1}. Comme $x(a_j) = 0$ et que $x > 0$ sur $]a_j, a_{j+1}[$, la fonction x est nécessairement strictement croissante au voisinage de a_j et donc $x'(a_j) > 0$, de même comme $x(a_{j+1}) = 0$ et $x > 0$ sur $]a_j, a_{j+1}[$, la fonction x est nécessairement strictement décroissante au voisinage de a_{j+1} et $x'(a_{j+1}) < 0$. On en déduit que

   $$w(a_{j+1}) = y(a_{j+1})x'(a_{j+1}) < 0 < w(a_j) = y(a_j)x'(a_j)$$

   c'est absurde.

   (b) La fonction x est continue sur l'intervalle $]a_j, a_{j+1}[$ et ne s'annule pas donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction x garde un signe constant. Quitte à changer la fonction x en $-x$, ce qui ne change pas les autres propriétés vérifiées par la fonction x, on peut supposer que $x > 0$ sur l'intervalle $]a_j, a_{j+1}[$. Si la fonction continue y ne s'annule pas sur l'intervalle $]a_j, a_{j+1}[$, alors elle garde un signe constant et quitte à changer y en $-y$ on peut supposer que $y > 0$, ce qui est impossible d'après 2a donc la fonction y s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a_j, a_{j+1}[$.

Partie II.

3. (a) La fonction φ est dérivable sur $[0,T]$, comme produit de deux fonctions $\mathcal{C}^1$ et

   $$\forall t \in [-T,T],\ \varphi'(t) = be^{-bt}(f(t) - a - b\int_0^t f(s)\,ds) \leq 0$$

   La fonction φ est donc décroissante sur $[0,T]$ et donc pour $t \in [0,T]$,

   $$f(t)e^{-bt} \leq \varphi(t) \leq \varphi(0) = a$$

   ce qui permet de conclure.

   (b) L'idée est de se ramener à la question précédente. Soit $t \in [0,T]$,

   - d'après l'inégalité triangulaire : $\|X(t)\| - \|X(0)\| \leq \|X(t) - X(0)\| \leq \| \int_0^t X'(s)\,ds\|$
   - puis,
     $$\| \int_0^t X'(s)\,ds\| \leq \int_0^t \|X'(s)\|\,ds \leq at + b\int_0^t \|X(s)\|\,ds \leq aT + b\int_0^t \|X(s)\|\,ds$$

   et donc,

   $$\|X(t)\| \leq \|X(0)\| + aT + b\int_0^t \|X(s)\|\,ds$$

   La question 3a implique alors que : $\|X(t)\| \leq (\|X(0)\| + aT)e^{bt}$

Il reste à établir l'inégalité sur $[-T, 0]$. En notant $Y(x) = X(-x)$, il vient pour $t \in [0, T]$,

$$\|Y'(t)\| = \|X'(-t)\| \leq \|X(0)\| + b\|X(-t)\| = \|Y(0)\| + b\|Y(t)\|$$

on en déduit que $\|X(-t)\| = \|Y(t)\| \leq (\|X(0)\| + aT)e^{bt}$ et pour tout $t \in [-T, T]$,

$$\|X(t)\| \leq \begin{cases} (\|X(0)\| + aT)e^{bt} & \text{si } t \in [0, T] \\ (\|X(0)\| + aT)e^{-bt} & \text{si } t \in [-T, 0[\end{cases} = (\|X(0)\| + aT)e^{b|t|}$$

4. On note $\| - \|$ pour la norme matricielle donnée par l'énoncé, indépendamment des tailles de matrices considérées.

   - Pour tout couple $(i, j) \in [\![1, N]\!] \times [\![1, P]\!]$, $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{M} A_{i,k}B_{k,j}$
   - Pour chaque indice $i \in [\![1, N]\!]$,

   $$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{P} |(AB)_{i,j}| &\leq \sum_{j=1}^{P} \left|\sum_{k=1}^{M} A_{i,k}B_{k,j}\right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{P} \sum_{k=1}^{M} |A_{i,k}B_{k,j}| \\ &\leq \sum_{k=1}^{M} |A_{i,k}| \sum_{j=1}^{P} |B_{k,j}| \\ &\leq \|B\| \sum_{k=1}^{M} |A_{i,k}| \\ &\leq \|A\|\|B\| \end{aligned}$$

   donc $\|AB\| = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^{P} |(AB)_{i,j}| \leq \|A\|\|B\|$.

5. Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, les coordonnées de $X_\lambda(t)$ sont $(x_\lambda(t), x'_\lambda(t))$ et chacune des fonctions $t \longmapsto x_\lambda(t)$ et $t \longmapsto x'_\lambda(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc X_λ est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

   $$X'_\lambda(t) = \begin{pmatrix} x'_\lambda(t) \\ x''_\lambda(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_\lambda(t) \\ p(t)x_\lambda(t) - \lambda x_\lambda(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p(t) - \lambda & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_\lambda(t) \\ x'_\lambda(t) \end{pmatrix}$$

   la matrice $A_\lambda(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p(t) - \lambda & 0 \end{pmatrix}$ convient.

6. La fonction $F : (\lambda, t) \longmapsto \|A_\lambda(t)\|$ est continue sur le compact $[-R, R]^2$ comme composée de la fonction continue $(t, \lambda) \longmapsto A_\lambda(t)$ et de la fonction $x \longmapsto \|x\|$ qui est est 1-lipschitzienne. Le théorème des bornes atteintes prouve que la fonction F atteint une valeur maximum, donc c est bien défini et est un maximum. Puis pour tout $(\lambda, t) \in [-R, R]^2$, on obtient en utilisant le résultat de la question 4:

   $$\|X'_\lambda(t)\| \leq \|A_\lambda(t)\|\|X_\lambda(t)\| \leq c\|X_\lambda(t)\|$$

   et donc d'après $3b$ (avec $T = R$), $\|X_\lambda(t)\| \leq \|X(0)\|e^{c|t|}$. Comme $\|X(0)\| = 1$, la conclusion suit.

7. (a) Par symétrie des rôles de t et de s, on suppose que $t \leq s$ et donc

   $$\begin{aligned} \|X_\lambda(t) - X_\lambda(s)\| &= \|\int_t^s X'_\lambda(u)\,du\| \\ &\leq \int_t^s \|X'_\lambda(u)\|\,du \\ &\leq c\int_t^s \|X_\lambda(u)\|\,du \\ &\leq c|t - s| \sup_{u \in [t,s]} \|X_\lambda(u)\| \\ &\leq c|t - s| \sup_{[-R,R]} e^{c|u|} = ce^{cR}|t - s| \end{aligned}$$

   ce n'est pas tout à fait l'inégalité de l'énoncé mais suffit pour la suite.

(b) On a immédiatement,

$$X'_\lambda(t) - X'_\mu(t) = A_\lambda(t)(X_\lambda(t) - X_\mu(t)) + (A_\lambda(t) - A_\mu(t))X_\mu(t)$$

et donc en notant $Z_{\lambda,\mu} = X_\lambda - X_\mu$,

$$\|Z'_{\lambda,\mu}(t)\| \leq \|A_\lambda(t)\|\|Z_{\lambda,\mu}(t)\| + \|A_\lambda(t) - A_\mu(t)\|\|X_\mu(t)\|$$

Or,

$$A_\lambda(t) - A_\mu(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\lambda + \mu & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\|A_\lambda(t) - A_\mu(t)\| = |\lambda - \mu|$ et comme $\|X_\mu(t)\| \leq e^{c|t|} \leq e^{cR}$ il vient,

$$\|Z'_{\lambda,\mu}(t)\| \leq c\|Z_{\lambda,\mu}(t)\| + |\lambda - \mu|e^{cR}$$

et vu 3b,

$$\|X_\lambda(t) - X_\mu(t)\| = \|Z_{\lambda,\mu}(t)\| \leq |\lambda - \mu|e^{cR}e^{c|t|} \leq |\lambda - \mu|e^{2cR}$$

(c) Soient $(\lambda, t), (\mu, s) \in \mathbb{R}^2$, en utilisant les inégalités précédentes

$$\phi(\lambda, t) - \phi(\mu, s) = X_\lambda(t - X_\mu(s) = X_\lambda(t) - X_\lambda(s) + X_\lambda(s) - X_\mu(s)$$

et donc,

$$\|\phi(\lambda, t) - \phi(\mu, s)\| \leq \|X_\lambda(t) - X_\lambda(s)\| + \|X_\lambda(s) - X_\mu(s)\|$$

Soit $R > 0$ tel que $(\lambda, t), (\mu, s) \in] - R, R[^2$, avec les notations des questions précédentes,

$$\|\phi(\lambda, t) - \phi(\mu, s)\| \leq ce^{cR}|t - s| + e^{2cR}|\lambda - \mu| \xrightarrow[(\mu,s)\to(\lambda,t)]{} 0$$

donc, $\phi(\mu, s) \xrightarrow[(\mu,s)\to(\lambda,t)]{} \phi(\lambda, t)$ ce qui prouve la continuité de ϕ sur $\mathbb{R}^2$ (propriété qui ne dépend pas des normes choisies).

8. (a) Pour tout $r \geq 0$, on note $I_r = \{|p(t) - p(s)|/(t, s) \in [-R, R]^2, |t - s| \leq r\}$. L'ensemble I_r est non vide (contient $0 = |p(0) - p(0)|$) et majoré car la fonction continue p est bornée sur le segment $[-R, R]$. On note $\omega(r) = \sup I_r$ et on va justifier que la fonction ω convient.

Si $r \leq r'$ alors $I_r \subset I_{r'}$ donc I_r est majoré par $\omega(r') = \sup I_{r'}$ et donc $\omega(r) = \sup I_r \leq \omega(r')$, la fonction ω est donc croissante.

La fonction p est continue sur le segment $[-R, R]$ donc est uniformément continue sur $[-R, R]$ d'après le théorème de Heine. Soit $\varepsilon > 0$.

- il existe $\delta > 0$ tel que: $\forall x, y \in [a, b]$ $|x - y| \leq \delta |p(x) - p(y)| \leq \varepsilon$
- pour tout $h \in [0, \delta]$, pour tout $x, y \in [a, b]$ tels que $|x - y| \leq h$ on a $|x - y| \leq \delta$ donc $|p(x) - p(y)| \leq \varepsilon$ et ainsi $(0 \leq)\omega(h) \leq \varepsilon$. On en déduit que $\lim_{h\to 0} \omega(h) = 0 = \omega(0)$ ce qui prouve la continuité en 0 de la fonction ω.

Soient $h, h' \in \mathbb{R}^+$ et soient $x, y \in [-R, R]$ tels que $|x - y| \leq h + h'$. Quitte à échanger x et y on peut supposer que $x \leq y$.

- si $|y - x| \leq h$ ou $|y - x| \leq h'$ alors $|p(x) - p(y)| \leq \omega(h)$ ou $|p(x) - p(y)| \leq \omega(h')$ et donc $|p(x) - p(y)| \leq \omega(h) + \omega(h')$
- si $|y - x| > h$ alors $x < x + h < y$ et donc $0 < y - (x + h) < h + h' - h = h'$ et l'inégalité triangulaire implique que
$$|p(y) - p(x)| \leq |p(y) - p(x + h)| + |p(x + h) - p(x)| \leq \omega(h') + \omega(h)$$
- L'ensemble $I_{h+h'} = \{|p(x) - p(y)|/x, y \in [a, b], |x - y| \leq h + h'\}$ est majoré par $\omega(h') + \omega(h)$ et donc sa borne supérieure $\omega(h + h')$ vérifie $\omega(h + h') \leq \omega(h) + \omega(h')$.

En particulier si $h_0 > 0$, alors pour tout $h' \geq 0$,

- l'inégalité précédente implique que $0 \leq \omega(h_0 + h') - \omega(h_0) \leq \omega(h')$ donc $\lim_{h' \to 0} \omega(h_0 + h') = \omega(h_0)$ ce qui prouve la continuité à droite en h_0.
- l'inégalité précédente implique que $0 \leq -\omega(h_0 - h') + \omega(h_0) \leq \omega(h')$ donc $\lim_{h' \to 0} \omega(h_0 - h') = \omega(h_0)$ ce qui prouve la continuité à gauche en h_0.

La fonction ω est donc continue sur $\mathbb{R}^+$, et par construction

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, |p(t) - p(s)| \leq \omega(|t-s|)$$

la fonction ω convient.

(b) Il s'agit d'utiliser la question précédente,

$$\Delta = X_\lambda(t) - X_\lambda(s) - (t-s)A_\lambda(s)X_\lambda(s) = \int_s^t X'_\lambda(u)\,du - \int_s^t X'_\lambda(s)\,du = \int_s^t (X'_\lambda(u) - X'_\lambda(s))\,du$$

donc,

$$\|\Delta\| \leq \left| \int_s^t \|X'_\lambda(u) - X'_\lambda(s)\|\,du \right|$$

les valeurs absolues permettant de traiter le cas $s > t$. Or,

$$X'_\lambda(u) - X'_\lambda(s) = A_\lambda(u)X_\lambda(u) - A_\lambda(s)X_\lambda(s) = A_\lambda(u)(X_\lambda(u) - X_\lambda(s)) + (A_\lambda(u) - A_\lambda(s))X_\lambda(s)$$

donc,

$$\begin{aligned} \|\Delta\| &\leq |\textstyle\int_s^t \|A_\lambda(u)(X_\lambda(u) - X_\lambda(s))\|\,du| + |\int_s^t \|(A_\lambda(u) - A_\lambda(s))X_\lambda(s)\|\,du| \\ &\leq |\textstyle\int_s^t \|A_\lambda(u)\|\|(X_\lambda(u) - X_\lambda(s))\|\,du| + |\int_s^t \|A_\lambda(u) - A_\lambda(s)\|\|X_\lambda(s)\|\,du| \\ &\leq c|\textstyle\int_s^t ce^{cR}|u-s|\,du| + c|\int_s^t \|A_\lambda(u) - A_\lambda(s)\|\,du \end{aligned}$$

On observe alors que pour $u \in [s,t]$ (ou $u \in [t,s]$)

$$\|A_\lambda(u) - A_\lambda(s)\| = \| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p(u) - p(s) & 0 \end{pmatrix} \| = |p(u) - p(s)| \leq \omega(|u-s|) \leq \omega(|t-s|)$$

la dernière inégalité résultatnt de la monotonie de la fonction ω, et donc,

$$\|\Delta\| \leq c^2 e^{cR} \frac{(t-s)^2}{2} + c|t-s|\omega(|t-s|)$$

la fonction $\alpha(x) = c^2 e^{cR} \frac{x^2}{2} + cx\omega(x)$ convient car l'inégalité requise est vérifiée, la fonction α est continue et $\frac{\alpha(r)}{r} = c^2 e^{cR} \frac{r}{2} + c\omega(r)$ tend vers 0 en 0.

(c) On note dans cette question, $Z_{\lambda,\mu}(t) = X_\lambda(t) - X_\mu(t) - (\lambda - \mu)Y_\mu(t)$ de sorte que

$$\begin{aligned} Z'_{\lambda,\mu}(t) &= A_\lambda(t)X_\lambda(t) - A_\mu(t)X_\mu(t) - (\lambda-\mu)A_\mu(t)Y_\mu(t) + \underbrace{(\lambda - \mu)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{(A_\mu(t) - A_\lambda(t))} \\ &= A_\mu(t)Z_{\lambda,\mu}(t) + (A_\lambda(t) - A_\mu(t))(X_\lambda(t) - X_\mu(t)) \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} \|Z'_{\lambda,\mu}(t)\| &\leq \|A_\mu(t)\|\|Z_{\lambda,\mu}(t)\| + \|A_\lambda(t) - A_\mu(t)\|.\|X_\lambda(t) - X_\mu(t)\| \\ &\leq |\lambda - \mu|^2 e^{2cR} + c\|Z_{\lambda,\mu}(t)\| \end{aligned}$$

et donc, $\|Z_{\lambda,\mu}(t)\| \leq |\lambda - \mu|^2 e^{2cR} e^{c|t|} \leq |\lambda - \mu|^2 e^{3cR}$.

(d) Soit $(\lambda,t)\in\mathbb{R}^2$ et $R>0$ tel que $(\lambda,t)\in]-R,R[^2$. Il existe $\varepsilon>0$ tel que $B_o((\lambda,t),\varepsilon)\subset]-R,R[^2$ et pour $(h,k)\in\mathbb{R}^2$, tel que $\|(h,k)\|<\varepsilon$,

- $\phi(\lambda+h,t+k)-\phi(\lambda,t)=X_{\lambda+h}(t+k)-X_{\lambda+h}(t)+X_{\lambda+h}(t)-X_\lambda(t)$
- $\|X_{\lambda+h}(t)-X_\lambda(t)-hY_\lambda(t)\|\le e^{3cR}h^2$ d'après la question 8c.
- puis,

$$\begin{aligned}X_{\lambda+h}(t+k)-X_{\lambda+h}(t) &= \int_t^{t+k} A_{\lambda+h}(u)X_{\lambda+h}(u)\,du\\ &= k\int_0^1 A_{\lambda+h}(t+ks)X_{\lambda+h}(t+ks)\,ds\\ &= k\int_0^1 A_{\lambda+h}(t)X_{\lambda+h}(t)\,ds+k\int_0^1(A_{\lambda+h}(t+ks)X_{\lambda+h}(t+ks)\\ &\quad -A_{\lambda+h}(t)X_{\lambda+h}(t))\,ds\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}A_{\lambda+h}(t+ks)X_{\lambda+h}(t+ks)-A_{\lambda+h}(t)X_{\lambda+h}(t) &= [A_{\lambda+h}(t+ks)-A_{\lambda+h}(t)]X_{\lambda+h}(t+ks)\\ &\quad +A_{\lambda+h}(t)(X_{\lambda+h}(t+ks)\\ &\quad -X_\lambda(t+ks))+A_{\lambda+h}(t)(X_\lambda(t+ks)-X_\lambda(t))\\ &\quad +(A_{\lambda+h}(t)-A_\lambda(t))X_\lambda(t)\end{aligned}$$

donc en utilisant l'inégalité triangulaire et en majorant chaque terme,

$$\|A_{\lambda+h}(t+ks)X_{\lambda+h}(t+ks)-A_{\lambda+h}(t)X_{\lambda+h}(t)\|\le\|A_{\lambda+h}(t+ks)-A_{\lambda+h}(t)\|e^{cR}+ce^{cR}|h|+c^2e^{cR}|ks|+|h|ce^{cR}$$

Or,

$$\|A_{\lambda+h}(t+ks)-A_{\lambda+h}(t)\|=|p(t+ks)-p(t)|\le\omega(|ks|)\le\omega(|k|)$$

et comme $s\in[0,1]$, on obtient que

$$\|A_{\lambda+h}(t+ks)X_{\lambda+h}(t+ks)-A_{\lambda+h}(t)X_{\lambda+h}(t)\|\le\omega(|k|)+ce^{cR}|h|+c^2e^{cR}|k|+|h|ce^{cR}=o(1)$$

donc,

$$X_{\lambda+h}(t+k)-X_{\lambda+h}(t)=kA_\lambda(t)X_\lambda(t)+o((h,k))$$

- En recollant les morceaux,

$$\phi(\lambda+h,t+k)-\phi(\lambda,t)=hY_\lambda(t)+kA_\lambda(t)X_\lambda(t)+o((h,k))$$

donc ϕ est différentiable en (λ,t) et

$$d\phi(\lambda,t)(h,k)=hY_\lambda(t)+kA_\lambda(t)X_\lambda(t)$$

9. Comme $A_\lambda(t)=B_\lambda+\begin{pmatrix}0&0\\p(t)&0\end{pmatrix}$, la fonction X_λ vérifie,

$$\begin{cases}X_\lambda'(t)=B_\lambda X_\lambda(t)+\begin{pmatrix}0\\p(t)x_\lambda(t)\end{pmatrix}\\ X_\lambda(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{cases}$$

L'idée est d'interpréter X_λ comme une solution de ce problème de Cauchy à coefficients constants avec un second membre. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $t\longmapsto e^{tB_\lambda}X_0$ où $X_0\in\mathbb{R}^2$. Si $Y\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ alors la fonction $t\longmapsto e^{tB_\lambda}Y(t)$ est solution si et seulement si pour tout réel t,

$$B_\lambda e^{tB_\lambda}Y(t)+e^{tB_\lambda}Y'(t)=B_\lambda e^{tB_\lambda}Y(t)+\begin{pmatrix}0\\p(t)x_\lambda(t)\end{pmatrix}$$

i.e. si et seulement si $Y'(t) = e^{-tB_\lambda}\begin{pmatrix}0\\p(t)x_\lambda(t)\end{pmatrix}$, on en déduit que $t \longmapsto e^{tB_\lambda}\int_0^t e^{-sB_\lambda}\begin{pmatrix}0\\p(s)x_\lambda(s)\end{pmatrix}ds$ est une solution, et avec la condition initiale,

$$X_\lambda(t) = e^{tB_\lambda}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + e^{tB_\lambda}\int_0^t e^{-sB_\lambda}\begin{pmatrix}0\\p(s)x_\lambda(s)\end{pmatrix}ds$$

10. (a) Un calcul donne $B_\lambda^2 = -\lambda I_2$, on en déduit facilement que

$$B_\lambda^n = \begin{cases}\lambda^{2p}I_2 & \text{si } n = 4p\\ \lambda^{2p}B_\lambda & n = 4p+1\\ -\lambda^{2p+1}I_2 & n = 4p+2\\ -\lambda^{2p+1}B_\lambda & n = 4p+3\end{cases}$$

donc,

$$e^{tB_\lambda} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}B_\lambda^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}B_\lambda^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}B_\lambda^{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!}\lambda^k I_2 + \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\lambda^k B_\lambda$$

Or,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!}\lambda^k = \cos(\sqrt{\lambda}t)$$

et

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\sqrt{\lambda}2k+1 = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}}$$

d'où le résultat en identifiant la première coordonnée dans l'égalité de 9.

(b) D'après 10a, pour tout $t \in [0,1]$,

$$|x_\lambda(t)| \leq \left|\frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}}\right| + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}|\int_0^t \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(t-s)}{\sqrt{\lambda}}p(s)x_\lambda(s)\,ds \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\|p\|_\infty}{\sqrt{\lambda}}\int_0^t |x_\lambda(s)|\,ds$$

et on conclut directement avec 3a.

Partie III.

11. On note $\mathcal{Z}_p(\lambda)$ l'ensemble des zéros de x_λ sur $]0,1]$. On note $x_0 < x_1 < \ldots < x_r$ les zéros de la fonction x_λ associée à la fonction p i.e. $\mathcal{Z}_p(\lambda) = \{x_1,\ldots,x_r\}$. D'après la question 2, sur chacun des intervalles $]x_0,x_1[,\ldots,x_{r-1},x_r[$ il y a un élément de $\mathcal{Z}_q(\lambda)$ donc $Z_q(\lambda) \geq r = Z_p(\lambda)$.

    Si $\lambda < \mu$ alors $q = p + \lambda - \mu < p$ et l'on a déjà au moins r zéros avec ce qui précède. Or ces r éléments de $\mathcal{Z}_q(\lambda)$ obtenu précedemment sont strictement inférieurs à 1, donc 1 est un zéro supplémentaire et $Z_q(\lambda) \geq r+1 = Z_p(\lambda)+1$.

12. La fonction x_λ est solution de l'équation différentielle linéaire ordinaire d'ordre 2, $y'' - (p-\lambda)y = 0$ avec $y(0) = 0 = 1 - y'(0)$. L'équation caractéristique est $r^2 = p - \lambda$, il y a alors trois cas à étudier.

    - $p - \lambda > 0$. Il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $x_\lambda : t \in \mathbb{R} \longmapsto A\,\mathrm{ch}(\sqrt{p-\lambda}t) + B\,\mathrm{sh}(\sqrt{p-\lambda}t)$ et $x_\lambda(0) = 0 = 1 - x'_\lambda(0)$ impose $x_\lambda : t \longmapsto \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{p-\lambda}t)}{\sqrt{p-\lambda}}$ et directement $Z_p(\lambda) = 0$.
    - $p = \lambda$. Il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $x_\lambda : t \in \mathbb{R} \longmapsto At + B$ et $x_\lambda(0) = 0 = 1 - x'_\lambda(0)$ impose $x_\lambda : t \longmapsto t$ et directement $Z_p(\lambda) = 0$.

- $p-\lambda<0$. Il existe $A,B\in\mathbb{R}$ tels que $x_\lambda : t\in\mathbb{R}\longmapsto A\cos(\sqrt{-p+\lambda}t)+B\sin(\sqrt{-p+\lambda}t)$ et $x_\lambda(0)=0=1-x'_\lambda(0)$ impose $x_\lambda : t\longmapsto \frac{\sin(\sqrt{-p+\lambda}t)}{\sqrt{-p+\lambda}}$ et directement

$$\begin{aligned} t\in\mathcal{Z}_p(\lambda) &\iff \begin{cases} \exists k\in\mathbb{Z}, \sqrt{\lambda-p}t=k\pi \\ t\in]0,1] \end{cases} \\ &\iff \exists k\in\mathbb{N}, 0<\tfrac{k\pi}{\sqrt{\lambda-p}}\leq 1 \\ &\iff \exists k\in\mathbb{N}, 1\leq k\leq \tfrac{\sqrt{\lambda-p}}{\pi} \end{aligned}$$

Il vient, $Z_p(\lambda)=\lfloor\frac{\sqrt{\lambda-p}}{\pi}\rfloor$.

13. (a) La fonction p est continue sur le segment $[0,1]$ et le théorème des bornes atteintes justifie l'existence des deux réels p^+ et p^- données par l'énoncé. Si $\lambda<p^-\leq p$ alors $Z_p(\lambda)\leq Z_\lambda(\lambda)=0$ et si $\lambda\geq p^+\geq p\geq p^->p^--1$ alors $p>p^--1$ et donc

$$Z_p(\lambda)\leq Z_{p^--1}(\lambda)=\left\lfloor\frac{\sqrt{\lambda-p^-+1}}{\pi}\right\rfloor$$

(b) On a $p<p^++1$ donc si $\lambda\geq p^++1$ alors

$$Z_p(\lambda)\geq Z_{p^++1}(\lambda)=\left\lfloor\frac{\sqrt{\lambda-p^+-1}}{\pi}\right\rfloor$$

Si de plus $x_\lambda(1)=0$ alors d'après la question 11,

$$Z_p(\lambda)\geq Z_{p^++1}(\lambda)=\left\lfloor\frac{\sqrt{\lambda-p^+-1}}{\pi}\right\rfloor+1$$

14. (a) La fonction ϕ est continue donc d'après le théorème de Heine, uniformément continue sur le compact $K=[0,1]\times[\mu-1,\mu+1]$.
   - Soit $\alpha>0$. Il existe $\delta>0$ tel que pour tout $(\lambda,t),(\mu,t')\in K$, $\|(\lambda,t)-(\mu,t')\|\geq\delta\implies\|\phi(\lambda,t)-\phi(\mu,t')\|\leq\alpha$ où $\|-\|$ est une norme à choisir sur $\mathbb{R}^2$
   - $x'_\mu(t_0),\dots,x'_\mu(t_k)\neq 0$, on note $\eta'=\min(|x'_\mu(t_0)|,\dots,|x'_\mu(t_k)|)$ et par continuité des fonctions x'_μ, il existe $\varepsilon>0$ tel que pour chaque indice $j\in[\![0,k]\!]$, $|t-t_j|\leq\varepsilon$ implique $|x'_\mu(t)|\geq\eta'$. Quitte à prendre ε plus petit on peut supposer que $2\varepsilon\leq\min_{j\in[\![0,k-1]\!]}|t_{j+1}-t_j|$.
   - L'ensemble B_ε est un compact sur lequel la fonction x_λ ne s'annule pas donc $\min_{t\in B_\varepsilon}|x_\lambda(t)|=\eta''>0$.

   Prenons $\|-\|=\|-\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour $|\lambda-\mu|\leq\delta$,

$$\|\phi(\lambda,t)-\phi(\mu,t')\|=\|X_\lambda(t)-X_\mu(t)\|\leq\alpha$$

   donc $|x_\lambda(t)-x_\mu(t)|\leq\alpha$ donc pour tout $t\in B_\varepsilon$

$$|x_\lambda(t)|\geq|x_\mu(t)|-\alpha\geq\eta''-\alpha$$

   On termine en prenant $\alpha=\frac{\eta''}{2}$, $\theta=\delta$ et $\eta=\min(\eta''-\alpha,\eta')$.

(b) S'il existe un indice $j\in[\![0,k]\!]$ tel que la fonction x_λ s'annule deux fois sur $[t_j-\varepsilon,t_j+\varepsilon]\cap[0,1]$ en α,β avec $\alpha<\beta$ alors la fonction x_λ est continue sur $[\alpha,\beta]$, dérivable sur $]\alpha,\beta[$, $x_\lambda(\alpha)=x_\lambda(\beta)(=0)$ et donc d'après le théorème de Rolle, il existe $\gamma\in]\alpha,\beta[$ tel que $x'_\lambda(\gamma)=0$, c'est absurde car comme $|\gamma-t_j|\leq\varepsilon$, $|x'_\lambda(\gamma)|\geq\eta>0$.

   Observons que si l'on remplace θ par un réel strictement positif plus petit, les propriétés de la question précédente restent vraies. Soit $j\geq1$ tel que $t_j<1$. On sait que l'inégalité de 7b est encore vraie si l'on change de norme sur $\mathbb{R}^2$ (toutes les normes étant équivalentes dans $\mathbb{R}^2$) avec éventuellement une autre constante C remplaçant e^{2cR}, en choisissant $\|-\|_\infty$ on obtient,

$$|x'_\lambda(t_j)-x'_\mu(t_j)|\leq C|\lambda-\mu|\leq C\theta \text{ et } |x_\lambda(t_j)-x_\mu(t_j)|\leq C|\lambda-\mu|\leq C\theta$$

   On supposera dans la suite que $x'_\mu(t_j)>0$ ce qui ne change pas la généralité du raisonnement mais permet de fixer les signes. On en déduit que la fonction x'_μ est positive sur $[t_j-\varepsilon,t_j+\varepsilon]$ et donc,

$$x_\mu(t_j+\varepsilon) = \int_{t_j}^{t_j+\varepsilon} x'_\mu(u)\,du \geq \eta\varepsilon \text{ et } -x_\mu(t_j+\varepsilon) = \int_{t_j-\varepsilon}^{t_j} x'_\mu(u)\,du \geq \eta\varepsilon$$

Or $x_\lambda(t_j-\varepsilon) - x_\mu(t_j-\varepsilon) \leq C\theta$ donc

$$x_\lambda(t_j-\varepsilon) \leq -\eta\varepsilon + C\theta < 0$$

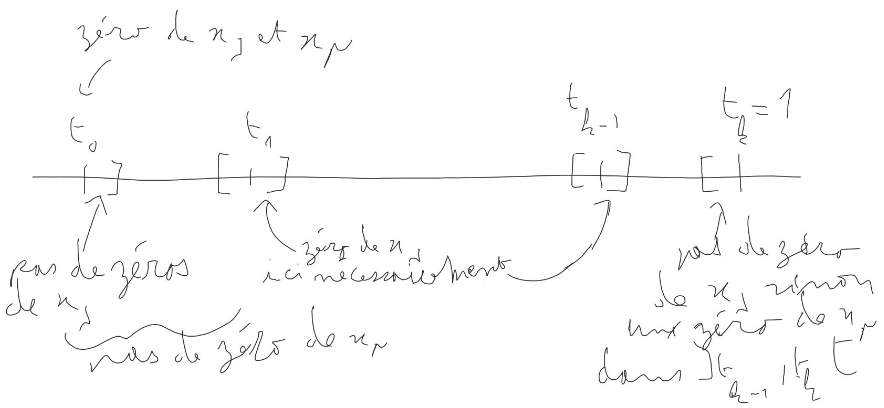
si θ est choisi assez petit. De même $x_\lambda(t_j+\varepsilon) \geq \eta\varepsilon - C\theta > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires prouve alors que la fonction x_λ s'annule sur l'intervalle $[t_j-\varepsilon, t_j+\varepsilon]$.

On ne peut conclure directement à partir de l'entrelacement des racines, le cas $\lambda < \mu$ pose problème.

(c) Dans ce cas $t_k < 1$ et donc comme x'_λ ne s'annule pas sur $]t_0, t_0+\varepsilon]$, la fonction x_λ ne s'annule pas sur $]t_0, t_0+\varepsilon]$. Sur chacun des intervalles $[t_j-\varepsilon, t_j+\varepsilon]$ avec $j \in [\![1,k]\!]$, la fonction x_λ s'annule exactement une fois, et en dehors de ces intervalles (donc sur B_ε), la fonction x_λ ne peut pas s'annuler, on en déduit que $Z_p(\lambda) = k = Z_p(\mu)$.

(d) Si $\lambda < \mu$ alors $p-\mu < p-\lambda$ et donc entre deux racines de x_μ, il y a au moins une racine de x_λ. D'après 14b, $Z_p(\lambda) \geq Z_p(\mu) - 1$ et d'près 11, $Z_p(\mu) \geq Z_p(\lambda) + 1$ donc $Z_p(\lambda) = Z_p(\mu) - 1$.

Si $\lambda \geq \mu$ alors la situation est la suivante,



donc $Z_p(\lambda) = Z_p(\mu)$

15. On va montrer que l'ensemble $\mathcal{E} = \{Z_p(\lambda)/\lambda \in \mathbb{R}\}$ est égal à $\mathbb{N}$. L'ensemble $\mathcal{E}$ est une partie de $\mathbb{N}$, non bornée car d'après 13b, $\lim_{\lambda\to+\infty} Z_p(\lambda) = +\infty$.

- $0 \in \mathcal{E}$ car $Z_p(p^- - 1) = 0$ d'après 13a.
- Soit $n \in \mathcal{E}$. L'ensemble $\{\mu \in \mathbb{R}/Z_p(\mu) = n\}$ est non vide, majoré car si λ est assez grand $Z_p(\lambda) > n$, on note $\mu_0 = \sup\{\mu \in \mathbb{R}/Z_p(\mu) = n\}$. La fonction Z_p étant croissante, $Z_p(\mu_0) \geq n$. Si $Z_p(\mu_0) > n+1$ alors d'après la question 14, pour μ assez proche de μ_0, $Z_p(\mu) = Z_p(\mu_0)$ ou $Z_p(\mu_0) - 1$ donc $Z_p(\mu) > n$, absurde car sur tout voisinage de μ_0 il y a au moins un élément de $\mathcal{E}$. On en déduit que $n \leq Z_p(\mu_0) \leq n+1$. Si $x_{\mu_0}(1) < 1$ alors $Z_p(\mu) = Z_p(\mu_0)$ pour μ au voisinage de μ_0 d'après 14c, en particulier pour $\mu > \mu_0$ suffisamment proche de μ_0 ce qui contredit la définition de μ_0. Par suite $x_{\mu_0}(1) = 1$ et $Z_p(\mu_0) = Z_p(\mu) + 1$ pour $\mu < \mu_0$ suffisamment proche de μ_0, or il existe un tel élément dans $\mathcal{E}$ (caractérisation de la borne supérieure) donc $Z_p(\mu_0) = n+1$.

L'ensemble $\mathcal{E}$ est une partie de $\mathbb{N}$ qui contient 0 et le successeur de chacun de ses éléments donc $\mathcal{E} = \mathbb{N}$.

16. (a) On note $\mathcal{E}_k = \{\lambda \in \mathbb{R}/Z_p(\lambda) = k-1\}$. La fonction Z_p est croissante donc pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathcal{E}_k \times \mathcal{E}_{k+1}$, $\lambda \leq \mu \leq \lambda_{k+1}$. On en déduit que λ_{k+1} est un majorant de $\mathcal{E}_k$ et par suite $\lambda_k \leq \lambda_{k+1}$. Comme,

$$k-1 = Z_p(\lambda_k) \leq \frac{\sqrt{\lambda_k + 1 - p^-}}{\pi}$$

la suite $\lim_{k\to+\infty} \lambda_k = +\infty$.

(b) Fait à la question 15.

17. (a) Comme $x_{\lambda_k}(1) = 0$,

$$\left\lfloor \frac{\sqrt{\lambda_k - 1 - p^+}}{\pi} \right\rfloor + 1 \leq Z_p(\lambda_k) = k \leq \left\lfloor \frac{\sqrt{\lambda_k + 1 - p^-}}{\pi} \right\rfloor$$

Est-ce suffisant?

(b) D'après 17a, $\frac{\sqrt{\lambda_k-1-p^+}}{\pi} \leq k$ donc $\lambda_k \leq (\pi k)^2+1+p^+$ et $(k\pi)^2+p^- - 1 \leq \lambda_k$ donc

$$\sqrt{(k\pi)^2+p^- - 1} \leq \sqrt{\lambda_k} \leq \sqrt{(\pi k)^2+1+p^+}$$

Or, $\sqrt{(k\pi)^2+p^- - 1} = \sqrt{k\pi} \times \sqrt{1+\frac{p^- - 1}{(k\pi)^2}} = \sqrt{k\pi} + \sqrt{k\pi} \times O(\frac{1}{k^2}) = \sqrt{k\pi} + O(\frac{1}{k})$ et de même $\sqrt{(\pi k)^2+1+p^+} = \sqrt{k\pi} + O(\frac{1}{k})$ la conclusion suit.

(c) En notant $k(\lambda) = N(\lambda)$ on a

$$\pi k(\lambda) + O(\frac{1}{k(\lambda)}) = \sqrt{\lambda_{k(\lambda)}} \leq \sqrt{\lambda} \leq \sqrt{\lambda_{k(\lambda)+1}} = \pi k(\lambda) + O(\frac{1}{k(\lambda)})$$

donc comme $k(\lambda)$ a pour limite $+\infty$ lorsque λ tend vers $+\infty$, $N(\lambda) = k(\lambda) \sim \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}$

18. (a) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, directement,

$$I_\lambda(f)(t) = \sin(\sqrt{\lambda}t)\underbrace{\int_0^t \cos(\sqrt{\lambda}s)p(s)f(s)\,ds}_{\in\mathcal{C}^0([0,1])} - \cos(\sqrt{\lambda}t)\underbrace{\int_0^t \sin(\sqrt{\lambda}s)p(s)f(s)\,ds}_{\in\mathcal{C}^0([0,1])}$$

donc $I_\lambda(f)$ est une fonction continue sur $[0,1]$ comme produit de fonctions continues sur $[0,1]$. La linéarité de I_λ est immédiate et l'expression précédente implique que pour $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} |I_\lambda(f)(t)| &\leq |\textstyle\int_0^t \cos(\sqrt{\lambda}s)p(s)f(s)\,ds| + |\int_0^t \sin(\sqrt{\lambda}s)p(s)f(s)\,ds| \\ &\leq \|p\|_\infty\|f\|_\infty t + \|p\|_\infty\|f\|_\infty t \\ &\leq 2\|p\|_\infty\|f\|_\infty \end{aligned}$$

d'où le résultat avec $K = 2\|p\|_\infty$.

(b) On commence par réinterpréter la question 10. D'après 10a, pour tout réel $t \in [0,1]$,

$$x_\lambda(t) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}I_\lambda(x_\lambda)$$

et d'après, la question 10*b*, pour $\lambda \geq 1$, $|x_\lambda(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}e^{\|p\|_\infty}$ donc, $\|x_\lambda\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}e^{\|p\|_\infty}$ et par conséquent,

$$x_\lambda(t) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}} + O(\frac{1}{\lambda})$$

On va démontrer la propriété de l'énoncé par récurrence sur n. Pour $n=1$,

$$x_\lambda = \frac{S_\lambda}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}I_\lambda(x_\lambda) = \frac{S_\lambda}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}I_\lambda(\frac{S_\lambda}{\sqrt{\lambda}} + O(\frac{1}{\lambda})) = \frac{S_\lambda}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\lambda}I_\lambda(S_\lambda) + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}I_\lambda(O(\frac{1}{\lambda}))}_{r_{1,\lambda}}$$

et $\|r_{1,\lambda}\|_\infty = O(\frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}}) = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{3}{2}}})$ d'où l'initialisation.

Soit $n \geq 1$. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n. Par hypothèse de récurrence,

$$x_\lambda = \frac{S_\lambda}{\sqrt{\lambda}} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda^{\frac{j+1}{2}}} I_\lambda^{<j>}(S_\lambda) + r_{n,\lambda}$$

où $I_\lambda^{<j>}$ désigne la composition itérée j de I_λ, donc,

$$\begin{aligned} x_\lambda = \tfrac{S_\lambda}{\sqrt{\lambda}} + \tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}I_\lambda(x_\lambda) &= \tfrac{S_\lambda}{\sqrt{\lambda}} + \tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\textstyle\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda^{\frac{j+1}{2}}}I_\lambda^{<j+1>}(S_\lambda) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}I_\lambda(r_{n,\lambda}) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\lambda^{\frac{j+1}{2}}}I_\lambda^{<j+1>}(S_\lambda) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}I_\lambda(r_{n,\lambda}) \end{aligned}$$

et en notant $r_{n+1,\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} I_\lambda(r_{n,\lambda})$ on a

$$\|r_{n+1,\lambda}\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{\|p\|_\infty} \|r_{n,\lambda}\|_\infty \leq \frac{C_n e^{\|p\|_\infty}}{\lambda^{n+3}2}$$

ce qui termine la récurrence.

(c) En reprenant les formules précédentes avec $n = 1$ et $t = 1$,

$$0 = \frac{S_{\lambda_k}(1)}{\sqrt{\lambda_k}} + \frac{1}{\lambda_k} I_{\lambda_k}(S_{\lambda_k})(1) + r_{1,k}(1)$$

donc,

$$\left| \frac{S_{\lambda_k}(1)}{\sqrt{\lambda_k}} + \frac{1}{\lambda_k} I_{\lambda_k}(S_{\lambda_k})(1) \right| = |r_{1,k}(1)| \leq \frac{C_1}{\lambda_k^{\frac{3}{2}}} = O(\frac{1}{k^3})$$

d'où le résultat.

(d) Avec les notations de l'énoncé $\sqrt{\lambda_k} = \pi k + \varepsilon_k$ et d'après 17b $\varepsilon_k = O(\frac{1}{k})$ donc

$$\sin(\sqrt{\lambda_k}) = (-1)^k \sin(\varepsilon_k) = (-1)^k (\varepsilon_k + O(\varepsilon_k^3))$$

donc,

$$\frac{\sin(\sqrt{\lambda_k})}{\sqrt{\lambda_k}} = \frac{(-1)^k (\varepsilon_k + O(\varepsilon_k^3))}{\pi k (1 + O(\frac{1}{k^2})} = \frac{(-1)^k}{\pi k} (\varepsilon_k + O(\frac{1}{k^3})) \times (1 - O(\frac{1}{k^2})$$

de sorte que $\frac{\sin(\sqrt{\lambda_k})}{\sqrt{\lambda_k}} = \frac{(-1)^k \varepsilon_k}{\pi k} + O(\frac{1}{k^3})$ d'où $\alpha = \frac{1}{\pi}$.

(e) Comme $2 \sin(a) \sin(b) = \cos(a - b) - \cos(a + b)$ on a

$$2 \int_0^1 \sin(\sqrt{\lambda_k}(1 - s)) p(s) \sin(\sqrt{\lambda_k} s)\, ds = \int_0^1 \cos(\sqrt{\lambda_k}(1 - 2s)) p(s)\, ds - \int_0^1 \cos(\sqrt{\lambda_k}) p(s)\, ds$$

On va étudier les deux termes de cette somme,

- $\cos(\sqrt{\lambda_k}) = (-1)^k \cos(\varepsilon_k) = (-1)^k + O(\varepsilon_k^2) = (-1)^k + O(\frac{1}{k^2})$
- Une intégration par partie, possible car dans cette partie la fonction p est de classe $\mathcal{C}^1$, implique que

$$\int_0^1 \cos(\sqrt{\lambda_k}(1 - 2s)) p(s)\, ds = \left[\frac{\sin(\sqrt{\lambda_k}(1 - 2s))}{-2\sqrt{\lambda_k}} \right]_0^1 + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \underbrace{\int_0^1 \sin(\sqrt{\lambda_k}(1 - 2s)) p'(s)\, ds}_{|-| \leq \|p'\|_\infty} = O(\frac{1}{k})$$

  car le crochet est nul.

On en déduit que,

$$\int_0^1 \sin(\sqrt{\lambda_k}(1 - s)) p(s) \sin(\sqrt{\lambda_k} s)\, ds = (-1)^k \times -\frac{1}{2} \int_0^1 p(s)\, ds + O(\frac{1}{k})$$

d'où $\beta = -\frac{1}{2} \int_0^1 p(s)\, ds$.

(f) D'après 18c et 18e, nous avons:

$$\frac{(-1)^k}{k} \varepsilon_k \alpha + \frac{1}{\lambda_k} (\beta (-1)^k + O(\frac{1}{k})) = O(\frac{1}{k^3})$$

Or, $\varepsilon_k = \sqrt{\lambda_k} - \pi k$ et donc en isolant $\sqrt{\lambda_k}$ et comme $\lambda_k = \pi^2 k^2 (1 + O(\frac{1}{k}))$,

$$\sqrt{\lambda_k} = \pi k - \beta \frac{k}{\alpha \lambda_k} + O(\frac{1}{k^2}) = \pi k \alpha - \frac{\beta}{\pi k} + O(\frac{1}{k^2})$$

d'où $\gamma = -\frac{\beta}{\pi}$.

19. Question totalement inutile pour l'épreuve, mais mathématiquement intéressante. Il s'agit d'une question de synthèse qui permet à partir des estimations précédentes, d'obtenir un développement asymptotique à deux termes de x_{λ_k}. D'après 18b,

$$x_{\lambda_k}(t) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda_k}t)}{\sqrt{\lambda_k}} + \frac{1}{\lambda_k} I_{\lambda_k}(S_{\lambda_k})(t) + r_{1,\lambda_k}(t)$$

La suite est technique et consiste à étudier chacun des termes, on peut déjà observer que $\|r_{1,\lambda_k}\|_\infty = O(\frac{1}{k^3})$.

- On sait que $\sqrt{\lambda_k} = \pi k + \varepsilon_k$ et que $\varepsilon_k = \frac{\gamma}{k} + O(\frac{1}{k^2})$,

$$\begin{aligned} \sin(\sqrt{\lambda_k}t) &= \sin(\pi kt)\cos(\varepsilon_k t) + \cos(\pi kt)\sin(\varepsilon_k t) \\ &= \sin(\pi kt)(1 + O(\varepsilon_k^2 t^2)) + \cos(\pi kt)(\varepsilon_k t - O(\varepsilon_k^3 t^3)) \\ &= \sin(\pi kt) + \tfrac{\gamma\cos(\pi kt)t}{k} + 0(\tfrac{1}{k^2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\sqrt{\lambda_k}t) &= \cos(\pi kt)\cos(\varepsilon_k t) - \sin(\pi kt)\sin(\varepsilon_k t) \\ &= \cos(\pi kt)(1 + O(\varepsilon_k^2 t^2)) - \sin(\pi kt)(\varepsilon_k t - O(\varepsilon_k^3 t^3)) \\ &= \cos(\pi kt) - \tfrac{\gamma\sin(\pi kt)t}{k} + 0(\tfrac{1}{k^2}) \end{aligned}$$

  et,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} = \frac{1}{\pi k + \frac{\gamma}{k} + O(\frac{1}{k^2})} = \frac{1}{\pi k}(1 - \frac{\gamma}{\pi k^2} + O(\frac{1}{k^3})) = \frac{1}{\pi k} + O(\frac{1}{k^3})$$

  donc,

$$\frac{\sin(\sqrt{\lambda_k}t)}{\sqrt{\lambda_k}} = \frac{\sin(\pi kt)}{\pi k} + \frac{\cos(\pi kt)}{\pi k}\varepsilon_k t + O(\frac{1}{k^3}) = \frac{\sin(\pi kt)}{\pi k} + \frac{\gamma\cos(\pi kt)}{\pi k^2}t + O(\frac{1}{k^3})$$

- Il reste à étudier l'autre terme. En utilisant la formule de 18a,

$$2I_{\lambda_k}(S_{\lambda_k})(t) = \sin(\sqrt{\lambda_k}t)\int_0^t \cos(\sqrt{\lambda_k}s)p(s)\sin(\sqrt{\lambda_k}s)\,ds - \cos(\sqrt{\lambda_k}t)\int_0^t \sin(\sqrt{\lambda_k}s)^2 p(s)\,ds$$

  Puis,

$$\int_0^t \cos(\sqrt{\lambda_k}s)p(s)\sin(\sqrt{\lambda_k}s)\,ds = \frac{1}{2}\int_0^t \sin(2\sqrt{\lambda_k}s)p(s)\,ds \left[\frac{\cos(2\sqrt{\lambda_k}s)}{-2\sqrt{\lambda_k}}p(s)\right]_0^t - \int_0^t \frac{\cos(2\sqrt{\lambda_k}s)}{-2\sqrt{\lambda_k}}p'(s)\,ds = O(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}})$$

  et comme $\sin(\sqrt{\lambda_k}s)^2 = \frac{1-\cos(2\sqrt{\lambda_k}s)}{2}$, en utilisant encore une intégration par partie,

$$\int_0^t \sin(\sqrt{\lambda_k}s)^2 p(s)\,ds = \frac{1}{2}\int_0^t p(s)\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t \cos(2\sqrt{\lambda_k}s)p(s)\,ds = \frac{1}{2}\int_0^t p(s)\,ds + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}})$$

  de sorte que,

$$\begin{aligned} 2I_{\lambda_k}(S_{\lambda_k})(t) &= \sin(\sqrt{\lambda_k}t)\textstyle\int_0^t \cos(\sqrt{\lambda_k}s)p(s)\sin(\sqrt{\lambda_k}s)\,ds - \cos(\sqrt{\lambda_k}t)\int_0^t \sin(\sqrt{\lambda_k}s)^2 p(s)\,ds \\ &= O(\tfrac{1}{\sqrt{\lambda_k}}) - \tfrac{\cos(\pi kt)}{2}\textstyle\int_0^t p(s)\,ds + O(\tfrac{1}{\sqrt{\lambda_k}}) \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à recoller les morceaux,

$$\begin{aligned} x_{\lambda_k}(t) &= \tfrac{\sin(\pi kt)}{\pi k} + \tfrac{\gamma\cos(\pi kt)}{\pi k^2}t + O(\tfrac{1}{k^3}) + \tfrac{1}{\lambda_k}(-\tfrac{\cos(\pi kt)}{2}\textstyle\int_0^t p(s)\,ds + O(\tfrac{1}{\sqrt{\lambda_k}})) \\ &= \tfrac{\sin(\pi kt)}{\pi k} + \tfrac{\gamma\cos(\pi kt)}{\pi k^2}t - \tfrac{\cos(\pi kt)}{2\pi^2 k^2}\textstyle\int_0^t p(s)\,ds + O(\tfrac{1}{k^3}) \end{aligned}$$

et donc, $h(t) = \frac{\gamma}{\pi}t - \frac{1}{2\pi^2}\int_0^t p(s)\,ds$. Dans chaque cas, les fonctions $O()$ qui interviennent sont continues, ce qui termine la preuve.