Problème : CCP MP 2018 (sans les questions Python)

Partie I - Permutation limite-intégrale et intégrale de Gauss

I.1 - Utilisation d'une série entière

Q1. On sait que pour tout $z \in \mathbb{R}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Cela donne,

$$\text{pour tout } x \in [0,1],\ e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}.$$

On note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$. Chaque fonction f_n est continue sur $[0,1]$. De plus, pour tout $x \in [0,1]$, $\left|f_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{n!}$ et la série $\sum \frac{1}{n!}$ converge. La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ et ainsi on peut permuter somme et intégrale :

$$\int_0^1 e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{n!} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.$$

Q2. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{(2n+1)n!}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle. Le théorème des séries alternées donne alors

$$|l - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k\right| \leqslant u_{n+1} = \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}.$$

I.2 - Utilisation d'une autre suite de fonctions

Q3. On fait attention de ne pas écrire un logarithme d'un réel négatif!!! Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $n > x^2$, on a

$$f_n(x) = \exp\left(n \ln(1 - \frac{x^2}{n})\right).$$

On a alors $n\ln(1 - \frac{x^2}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{nx^2}{n} = -x^2$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x^2}$. On a convergence simple sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$.

Q4. Si $x = 1$ et $n = 1$ (cas où $1 - x^2/n = 0$), l'inégalité est vraie. Sinon, on a $f_n(x) = \exp\left(n\ln(1 - \frac{x^2}{n})\right)$. La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $]-1,+\infty[$ car sa dérivée seconde est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{(1+x)^2}$ qui est négative. On en déduit que la courbe est située sous ses tangentes, notamment celle en 0 d'équation $y = x$. On a donc, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$. Cela donne, puisque $-1 < -\frac{x^2}{n} \leqslant 0$,

$$f_n(x) = \exp\left(n\ln(1 - \frac{x^2}{n})\right) \leqslant \exp\left(-n\frac{x^2}{n}\right) = e^{-x^2}.$$

On applique alors le théorème de convergence dominée à la suite d'intégrale $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$:

- la suite de fonctions continues f_n converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$,
- la fonction f est continue sur $[0,1]$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ où $\varphi = f$ est continue donc intégrable sur $[0,1]$.

On a par conséquent $\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$. Enfin, en développent,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-\frac{x^2}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^n \frac{x^{2k}}{n^k}$$

ce qui donne

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^n \frac{1}{(2k+1)n^k}.$$

Partie II - Notion de polynôme interpolateur

II.1 - Existence du polynôme interpolateur

Q5. Le polynôme l_i admet pour racines tous les x_j pour $j \neq i$. On a donc $l_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$. On a également directement $l_i(x_i) = 1$.

- chaque polynôme l_i est le produit de n facteurs de degré 1 donc l_i est un polynôme de degré n. On en déduit que L_n est un polynôme de degré au plus n.
- pour $k \in [\![0;n]\!]$,

$$L_n(f)(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x_k) = f(x_k).1 = f(x_k).$$

Ainsi $L_n(f)$ est bien un polynôme interpolateur de f aux points x_i.
Si P et Q sont deux tels polynômes alors $(P-Q)(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$ pour chaque $i \in [\![0;n]\!]$. Le polynôme $P - Q$, de degré au plus n, admet au moins $n+1$ racines distinctes donc ce polynôme est nul. On obtient l'unicité.

II.2 - Expression de l'erreur d'interpolation

Q6. On effectue la démonstration par récurrence sur p :

- pour $p = 1$, on retrouve le théorème de Rolle,
- soit $p \geqslant 1$ pour lequel la propriété est vraie. Soit phi dérivable $p+1$ fois qui admet $p+2$ racines distinctes dans $[a,b]$. On note ces racines $x_0 < x_1 < \ldots < x_{p+1}$. On applique le théorème de Rolle sur chaque segment $[x_k, x_{k+1}]$ pour $k \in [\![0;p]\!]$. Cela donne à chaque fois une racine pour ϕ' dans $]x_k, x_{k+1}[$. Ces intervalles étant deux à deux disjoints, on obtient $p+1$ racines distinctes dans $[a,b]$ pour la fonction ϕ' dérivable p fois. Par réccurence, il existe $c \in]a,b[$ tel que $(\phi')^{(p)}(c) = \phi^{(p+1)}(c) = 0$.

On a donc bien démontré le résultat par récurrence.

Q7. Lorsque $x \in \sigma$, alors $f(x) - L_n(f) = 0$ par définition de $L_n(f)$ et $\pi_\sigma(x) = 0$ car x est racine de π_σ. L'égalité demandée est vraie pour n'importe quelle valeur de $c_x \in]a,b[$.

Q8. Puisque $x \notin \sigma$, $\pi_\sigma(x) \neq 0$. On peut donc choisir $\lambda = \dfrac{f(x) - L_n(f)(x)}{\pi_\sigma(x)}$.

Q9. La fonction F s'annule en chacun des x_k car $f(x_k) = L_n(f)(x_k)$ et $\pi_\sigma(x_k) = 0$. Cela donne déjà $n+1$ racines distinctes de L dans $[a,b]$ Le réel x est la $n+2$-ième racine distincte. Il existe donc $c_x \in]a,b[$ tel que $F^{(n+1)}(c_x) = 0$. Or $L_n(f)$ est de degré au plus n donc $L_n^{(n+1)} = 0$ et π_σ est unitaire de degré $n+1$ donc $\pi_\sigma^{(n+1)} = (n+1)!$. Tout cela donne

$$L^{(n+1)}(c_x) = 0 = f^{(n+1)}(c_x) - \lambda(n+1)!$$

c'est-à-dire $\lambda = \dfrac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$. On a finalement l'existence de $c_x \in]a,b[$ tel quel

$$f(x) - L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\pi_\sigma(x)$$

pour $x \in \sigma$ et $x \in [a,b] \backslash \sigma$ donc pour tout $x \in [a,b]$.

Q10. La fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a,b]$ donc bornée sur ce segment. De plus si $x \in [a,b]$ et $x_i \in \sigma$ alors $|x - x_i| \leqslant (b-a)$. On en déduit que $|\pi_\sigma(x)| \leqslant (b-a)^{n+1}$ indépendamment du choix des x_i. Finalement, pour tout $x \in [a,b]$,

$$\left|f(x) - L_n(f)(x)\right| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty.$$

En posant $K = b-a$, on a,

$$\left\|f - L_n(f)\right\|_\infty \leqslant \frac{K^{n+1}}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty.$$

Q11. Lorsque f est la fonction sinus, alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,2\pi]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty = 1$. On a alors $\left\|f - L_n(f)\right\|_\infty \leqslant \dfrac{(2\pi)^{n+1}}{(n+1)!}$ (la norme étant prise sur $[0,2\pi]$). Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(2\pi)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left\|f - L_n(f)\right\|_\infty = 0$ et la suite $L_n(f)$ converge uniformément vers f sur $[0,2\pi]$.

Remarque : si on veut redémontrer que $\alpha_n = \dfrac{(2\pi)^{n+1}}{(n+1)!}$ tend vers 0, on peut appliquer le critère de d'Alembert. On a, en effet, $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \dfrac{2\pi}{n+2}$ de limite nulle donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

Q12. On a, pour tout $x \in]0,1[$,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n},$$

D'après les résultats sur les séries entières, $\dfrac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} = (-1)^n$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\|f^{(2n)}\right\|_\infty \geqslant |f^{(2n)(0)}| = (2n)!$.

Partie III - Famille de polynômes orthogonaux

Q13. On notera $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire.

- On a $\|1\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{d}t = 2$ donc $\|1\| = \sqrt{2}$ et $P_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
- On note $Q_1 = X - \langle X, P_0\rangle P_0 = X - \frac{1}{2}\left(\displaystyle\int_{-1}^1 t\mathrm{d}t\right) = X$. Et on a $P_1 = \frac{X}{\|X\|}$. On a alors

$$\|X\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 \mathrm{d}t = \frac{2}{3}$$

On a ainsi $P_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X$.

Q14. La polynôme P_n est orthogonal à $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ donc orthogonal à $\mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On sait que $P_n \in \mathrm{Vect}(1, X, \ldots, X^n)$ donc de degré au plus n. Si P était de degré au plus $n-1$ alors il serait orthogonal à lui-même (car alors $P \in R_{n-1}[X]$) ce qui donnerait $\|P_n\|^2 = \langle P_n, P_n\rangle = 0$ et $P_n = 0$ d'où une contradiction.

Remarque : on peut aussi utiliser la formule générale qui donne P_n : $P_n = \frac{Q_n}{\|Q_n\|}$ avec

$$Q_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle X^n, P_k\right\rangle P_k = X^n - R$$

où R est de degré au plus $n-1$.

Q15. Puisque $n \geqslant 1$, on a $\langle 1, P_n\rangle = 0$ c'est-à-dire $\int_{-1}^{1} P_n(t)\mathrm{d}t = 0$. Si P_n n'avait pas de racines dans $[-1,1]$ alors la fonction $t \mapsto P_n(t)$ étant continue sur ce segment, elle serait de signe constant. La condition de nullité de l'intégrale donne alors, pour tout $t \in [-1,1]$, $P_n(t) = 0$. Le polynôme admet une infinité de racines donc est le polynôme nul. On obtient une contradiction.

Q16. On a supposé que $p < n$. Le polynôme Q est de degré $p < n$ donc $\langle P_n, H\rangle = 0 = \int_{-1}^{1} H(t)\mathrm{d}t$. Le polynôme H n'a que des racines de multiplicité paires dans $[-1,1]$. Il garde donc un signe constant sur cet intervalle. Le même raisonnement que précédemment donne $H = 0$ et ainsi une contradiction. On a donc $p \geqslant n$. Puisque P_n admet au plus n racines distinctes, on en déduit que toutes les racines de P_n sont simples et dans $[-1,1]$.

Partie IV - Méthodes de quadrature

Q17. Soit $\varphi(t) = x_k + (t+1)\dfrac{x_{k+1}-x_k}{2}$. La fonction φ est affine donc de classe $\mathscr{C}^1$, vérifie $\varphi(-1) = x_k$ et $\varphi(1) = x_{k+1}$. On a $\varphi([-1,1]) = [x_k, x_{k+1}]$. On a donc

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(-1)}^{\varphi(1)} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \frac{x_{k+1}-x_k}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\mathrm{d}t.$$

Q18. Le polynôme P coïncide avec lui même aux différents points x_i donc $P = L_n(P)$ si $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a donc

$$\int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}\left(\sum_{i=0}^{n} P(x_i)l_i(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)\int_{-1}^{1} l_i(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i P(x_i) = J(P).$$

Q19. On a $l_0 = \dfrac{X-1}{-2}$ et $l_1 = \dfrac{X+1}{2}$. On a également

$$\alpha_0 = \int_{-1}^{1}\frac{t-1}{-2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\left[(t-1)^2\right]_{-1}^{1} = 1 \text{ et } \alpha_1 = 1.$$

Cela donne $J(g) = g(1) + g(-1) = (1-(-1))\dfrac{g(1)+g(-1)}{2}$: c'est l'aire du trapèze du dessin que j'aurais pu mettre en dessous.

Quadrature de Gauss

Q20. On a $J(QP_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i Q(t_i)P_{n+1}(t_i) = 0$ et $\int_{-1}^{1} Q(t)P_{n+1}(t)\mathrm{d}t = \langle Q, P_{n+1}\rangle = 0$ car $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ donc est orthogonal à P_{n+1}. On a donc $\int_{-1}^{1} Q(t)P_{n+1}(t)\mathrm{d}t = J(QP_{n+1}) = 0$. On a alors

$$J(P) = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i(QP_{n+1}+R)(t_i) = J(QP_{n+1}) + J(R) = J(R)$$

et

$$\int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}(QP_{n+1})(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} R(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} R(t)\mathrm{d}t$$

Puisque R est de degré au plus n, on a $J(R) = \int_{-1}^{1} R(t)\mathrm{d}t$ et finalement $J(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t$.

Q21. Pour $k \in [\![0;i]\!]$, le polynôme l_k^2 est de degré $2n$ donc $J(l_k^2) = \int_{-1}^{1} l_k^2(t)\mathrm{d}t > 0$. On a

$$J(l_k^2) = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i l_k^2(t_i) = \alpha_k$$

On a donc $\alpha_k > 0$. Avec P le polynôme constant égal à 1, on a

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}t = 2 = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i$$

Remarque : on vérifie que l'exemple de la question 23 donne bien $\alpha_0 + \alpha_1 = 2$.