Problème : CCP MP 2018 (sans les questions Python)

Notations

— Si f est une fonction réelle bornée sur $[a,b]$ avec $a<b$, on pose
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

— On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On pourra confondre les expressions « polynômes » et « fonctions polynomiales ».

Partie I - Permutation limite-intégral et intégrales de Gauss

On considère l'intégrale de Gauss
$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

I.1 - Utilisation d'une série entière

Q1. Démontrer à l'aide d'une série entière que
$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$$

On pose, pour $n\in\mathbb{N}$,
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}$$

Q2. Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on
$$|I - s_n| \leqslant \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}$$

I.2 - Utilisation d'une autre suite de fonctions

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit sur $[0,+\infty[$ la fonction f_n par :
$$f_n(x) = \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n$$

Q3. Déterminer, en détaillant, la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Q4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Démontrer que $\forall x\in[0,1],\ |f_n(x)|\leqslant e^{-x^2}$. En déduire que
$$I = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k(2k+1)}$$

Partie II - Notion de polynôme interpolateur

Soit $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne $n+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dans $[a,b]$, deux à deux distincts.
On appelle polynome interpolateur de f aux points x_i, un polynôme $P\in\mathbb{R}_n[X]$ qui coïncide avec f aux points x_i, c'est-à-dire tel que pour tout $i\in[\![0;n]\!]$, $P(x_i)=f(x_i)$.

II.1 - Existence du polynôme interpolateur

Pour tout entier i de $[\![0;n]\!]$, on définit le polynôme l_i de $\mathbb{R}_n[X]$ par :
$$l_i(X) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{X-x_k}{x_i-x_k}$$

On pose :
$$L_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(X)$$

Q5. Démontrer que $L_n(f)$ est un polynôme interpolateur de f aux points x_i, puis démontrer l'unicité d'un tel polynôme.

Un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur de Lagrange.

II.2 - Expression de l'erreur d'interpolation

On suppose, en plus dans cette partie, que f est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$. On rappelle que $L_n(f)$ est son unique polynôme interpolateur aux points x_i.
On note $\sigma = \{x_0,\ldots,x_n\}$ l'ensemble des points d'interpolations et π_σ le polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ défini par
$$\pi_\sigma = \prod_{i=0}^{n}(X-x_i)$$

On veut démontrer pour tout réel $x\in[a,b]$, la propriété suivante notée $\mathscr{P}_x$:
$$\exists c_x \in]a,b[,\ f(x) - L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\pi_\sigma(x)$$

Q6. Résultat préliminaire : soit $p\in\mathbb{N}^*$. Démontrer que si $\phi : [a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction p-fois dérivable qui s'annule $p+1$ fois, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $\phi^{(p)}(c)=0$.

Q7. Justifier que pour tout $x\in\sigma$, la propriété $\mathscr{P}_x$ est vraie.

On fixe x un réel de $[a,b]$ qui n'est pas dans σ. Soit λ un réel. On définit sur $[a,b]$ une application F par

$$F(t) = f(t) - L_n(f)(t) - \lambda\pi_\sigma(t)$$

Q8. Déterminer un réel λ de sorte que $F(x) = 0$. On choisira alors λ de cette façon.

Q9. Démontrer que F s'annule $n+2$ fois et en déduire que $\mathscr{P}_x$ est vraie.

Q10. Justifier que la fonction $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[a,b]$ et en déduire un réel positif K indépendant de n tel que

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leqslant \frac{K^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty$$

Q11. En déduire que si f est la fonction sinus, la suite $(L_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,2\pi]$

Q12. On définit f sur $[-1,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Démontrer à l'aide d'une série entière que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \left\|f^{(2k)}\right\|_\infty \geqslant (2k)!$$

Cette dernière inégalité montre que la quantité $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ peut être grande et cela peut empêcher parfois la convergence de la suite de polynômes interpolateurs. Ceci est appelé le phénomène de Runge.

Partie III - Famille de polynômes orthogonaux

On munit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ défini par : pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$,

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$$

On applique le procédé d'orthonomalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2, \dots)$ de $\mathbb{R}[X]$. On obtient donc une famille orthonormée de polynômes $(P_0, P_1, P_2, \dots)$ vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^k) = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_k)$$

Le polynôme P_n s'appelle le polynôme de Legendre d'indice n.

Q13. Calculer P_0 et P_1.

Q14. Justifier que pour $n \geqslant 1$, le polynôme P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Démontrer que le polynôme P_n est de degré n.

On prend $n \geqslant 1$. On veut démontrer que P_n admet n racines simples dans $[-1,1]$.

Q15. Justifier que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t)\,dt = 0$ et en déduire que P_n admet au moins une racine dans $[-1,1]$.

On suppose par l'absurde que P_n admet strictement moins de n racine simples. Si P_n admet des racines $t_1, \dots, t_p$ de multiplicité impaire avec $p < n$, on pose $Q = (X - t_1)\dots(X - t_p)$; sinon, on pose $Q = 1$. On considère enfin le polynôme $H = QP_n$.

Q16. Justifier que $\displaystyle\int_{-1}^{1} H(t)\,dt = 0$, puis conclure (on pourra remarquer que H est de signe constant sur $[-1,1]$).

Partie IV - Méthodes de quadrature

Dans cette partie, nous allons voir comment les polynôme interpolateurs de Lagrange peuvent être utilisés pour estimer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

Pour cela, on choisit d'abord une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ de l'intervalle $[a,b]$. A cause du phénomène de Runge, si N est grand, le polynôme interpolateur de f aux points x_i n'est pas forcément une bonne approximation de f. Approximer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ par $\displaystyle\int_a^b L_N(f)(x)\,dx$ n'est donc pas forcément pertinent...

Nous allons en fait approximer f par un polynôme d'interpolation sur chaque petit intervalle $[x_k, x_{k+1}]$. D'après la relation de Chasles, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$$

Q17. Justifier que

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \frac{x_{k+1}-x_k}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,dt \ \text{ avec }\ g(t) = f\left(x_k + (t+1)\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)$$

On est donc ramenés à estimer $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$ où $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

On se donne $n+1$ points $t_0, t_1, \dots, t_n$ dans $[-1,1]$, deux à deux distincts.

On rappelle que $L_n(g) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} g(t_i)l_i(X)$ est le polynôme interpolateur de g aux points t_i et on pose

$$J(g) = \int_{-1}^{1} L_n(g)(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i g(t_i) \ \text{ avec }\ \alpha_i = \int_{-1}^{1} l_i(t)\,dt$$

Lorsqu'on approxime $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$ par $J(g)$, c'est-à-dire :

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,dt \approx \sum_{i=0}^{n}\alpha_i g(t_i)$$

on dit que J est une méthode de quadrature associée aux points $t_0, \dots, t_n$ et aux poids $\alpha_0, \dots, \alpha_n$.

Q18. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $J(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\, dt$.

On dit que la méthode de quadrature J est d'ordre au moins n car la formule approchée est exacte pour les polynômes de dégré inférieur ou égal à n.

Q19. Exemple : on prend $n = 1$, $t_0 = -1$ et $t_1 = 1$. Déterminer α_0 et α_1. Expliquer à l'aide d'un graphique en prenant g positive pourquoi, dans ce cas, la méthode J s'appelle la "méthode des trapèzes".

Quadrature de Gauss

Dans les deux questions suivantes, on prend pour points d'interpolation $t_0, t_1, \dots, t_n$ les $(n+1)$ racines du polynôme de Legendre P_{n+1} introduit dans la partie 3.
Nous allons démontrer que, dans ce cas, la formule de quadrature J est d'ordre au moins $2n+1$.
Soit $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. On fait la division euclidienne de P par P_{n+1}, on note respectivement Q le quotient et R le reste de cette division :

$$P = QP_{n+1} + R$$

Q20. Démontrer que $J(QP_{n+1}) = \displaystyle\int_{-1}^{1} Q(t)P_{n+1}(t)\, dt$, puis conclure que $J(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\, dt$.

Q21. Démontrer que les poids $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ associés à la quadrature de Gauss sont strictement positifs et calculer leur somme.