Préliminaires

Q1. Soit $x \in F^\perp$. Pour tout $y \in F$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$. Puisque F est stable par u, on a $u(y) \in F$. Puisque $x \in F^\perp$, on a bien $\langle x, u(y)\rangle = 0$ donc $\langle u(x), y\rangle = 0$ pour tout $y \in F$. Finalement $u(x) \in F^\perp$ et le sous-espace vectoriel $F^\perp$ est stable par u.

Q2. On développe le produit scalaire :

$$\begin{aligned}
\langle u(\gamma(t)), \gamma(t)\rangle &= \langle u(x_0)\cos t + u(y)\sin t, x_0\cos t + y\sin t\rangle\\
&= \langle u(x_0), x_0\rangle \cos^2 t + \left(\langle u(x_0), y\rangle + \langle x_0, u(y)\rangle\right)\sin t.\cos t + \langle u(y), y\rangle \sin^2 t\\
&= \langle u(x_0), x_0\rangle \cos^2 t + 2\langle u(x_0), y\rangle \sin t.\cos t + \langle u(y), y\rangle \sin^2 t\\
&= \langle u(x_0), x_0\rangle \cos^2 t + \langle u(x_0), y\rangle \sin 2t + \langle u(y), y\rangle \sin^2 t
\end{aligned}$$

Sous cette forme, la fonction φ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Q3. Puisque x_0 et y sont orthogonaux et tous les deux unitaires, le théorème de Pythagore donne $\|\gamma(t)\|^2 = \|x_0\|^2\cos^2 t + \|y\|^2 \sin^2 t = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

On a alors $\gamma(0) = x_0$ et $\varphi(x_0) = \langle u(x_0), x_0\rangle$. L'application φ admet donc un maximum en 0. Puisqu'elle est définie sur l'ouvert $\mathbb{R}$, on a bien $\varphi'(0) = 0$

Q4. On dérive l'expression obtenue pour $\varphi(t)$. La dérivée en 0 est $2\langle u(x_0), y\rangle$. On a donc $\langle u(x_0), y\rangle = 0$.

Q5. On note $G = \{x_0\}^\perp$. C'est un hyperplan de F. Pour tout vecteur y unitaire de G, on a $\langle u(x_0), y\rangle = 0$. Par linéarité, pour tout vecteur $y \in G$, on a $\langle u(x_0), y\rangle = 0$. On en déduit que $u(x_0)$ est orthogonal à G donc dans $G^\perp = \mathrm{Vect}(x_0)$. Cela donne l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x_0) = \lambda x_0$. Puisque x_0 est non nul, c'est bien un vecteur propre de u.

Étude d'un opérateur

Q6. c'est une fonction « triangle » qui passe par les points $(0,0)$, $(s, 1-s)$ et $(1,0)$.

Q7. On note $\Delta = \{(x,x), x \in [0,1]$. Par opérations algébriques, K est continue sur $[0,1]^2\backslash\Delta$. Il reste à étudier la continuité aux points $(s_0, s_0) \in \Delta$. On a $K(s_0,s_0) = s_0(1-s_0)$. Soit $(h,k) \in [-1,1]^2$ tels que $(s_0+h, s_0+k) \in [0,1]^2$. On a

$$K(s_0+h, s_0+k) = \begin{cases} (s_0+k)(1-s_0-k) & \text{si } k < h\\ (s_0+h)(1-s_0-h) & \text{si } k \geqslant h\end{cases}$$

Si $k < h$,

$$|K(s_0+h, s_0+k) - K(s_0,s_0)| = |k(1-s_0) - ks_0 - hk| \leqslant |h|+|k|+|hk| \leqslant |h|+|k|+|h| \leqslant 2(|h|+|k|)$$

On a un calcul similaire dans l'autre domaine avec la même majoration finale. On a donc $|K(s_0+h, s_0+k) - K(s_0,s_0)| \leqslant 2\|(h,k)\|_1$ est la limite est nulle lorsque (h,k) tend vers $(0,0)$. On a donc la continuité aux points de Δ pour K. Finalement K est continue sur $[0,1]^2$.

Q8. on vérifie facilement les points suivants :

- $T(f)$ est bien définie sur $[0,1]$ puisque, pour $s \in [0,1]$, $t \mapsto k_s(t)f(t)$ est continue sur $[0,1]$ (et l'intégrale existe),
- si $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $s \in [0,1]$, $T(f+\lambda g)(s) = T(f)(s) + \lambda T(g)(s)$ et ainsi$T(f+\lambda g) = T(f) + \lambda T(g)$. L'application est linéaire sur E,
- l'application $s \mapsto T(f)(s)$ est continue sur $[0,1]$: on développe l'intégrale en

$$T(f)(s) = (1-s)\int_0^s t f(t)\,\mathrm{d}t + s\int_s^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

  Le théorème sur les primitives nous garantit que $s \mapsto T(f)(s)$ est continue sur $[0,1]$.
- On a, pour tout $s \in [0,1]$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|T(f)(s)| \leqslant \|k_s\|_2 \|f\|_2$$

  Puisque k_s est entre 0 et 1, on a $\|k_s\|_2 \leqslant 1$. Cela donne $|T(f)(s)| \leqslant \|f\|_2$. On a enfin

$$\|T(f)\|^2 = \int_0^1 T(f)^2(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^1 \|f\|_2^2\,\mathrm{d}s = \|f\|_2^2$$

  et ainsi $\|T(f)\| \leqslant \|f\|$. L'application linéaire est continue.

Q9. On reprend l'écriture précédente de $T(f)(s)$ avec p_k : pour tout $s \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
T(p_k)(s) &= (1-s)\int_0^s t^{k+1}\,\mathrm{d}t + s\int_s^1 (1-t)t^k\,\mathrm{d}t\\
&= (1-s)\frac{s^{k+2}}{k+2} + s\left[\frac{t^{k+1}}{k+1} - \frac{t^{k+2}}{k+2}\right]_s^1\\
&= \frac{1}{(k+1)(k+2)}s + \frac{s^{k+2}}{k+2} - s\frac{s^{k+1}}{k+1} = \frac{s - s^{k+2}}{(k+1)(k+2)}
\end{aligned}$$

L'application $T(p_k)$ est bien polynomiale donc F est stable par T.

Q10. On a $T(p_k)''(s) = -\dfrac{(k+2)(k+1)}{((k+2)(k+1)}s^k = -s^k$. On a donc $T(p_k)'' = -p_k$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$. Par linéarité, $T(p)'' = -p$ pour tout polynôme $p \in F$.

Q11. On reprend l'expression précédente une fois de plus (ou on constate que k_0 et k_1 sont les applications nulles) :

- $T(f)(0) = \displaystyle\int_0^0 t f(t)\,\mathrm{d}t + 0.\int_0^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0$,

- de même $T(f)(1)=0$.

Q12. On pourrait être tenté d'utiliser la densité de F dans E (pour la norme infinie donc pour la norme 2 utilisée) : si (g_n) est une suite de F qui converge vers f alors, par continuité de T, $T(g_n)$ converge vers $T(f)$. Le problème est la dérivation... on reprend les calculs :

$$T(f)(s)=(1-s)\int_0^s tf(t)\mathrm{d}t-s\int_1^s(1-t)f(t)\mathrm{d}t$$

par théorème sur les primitives, $T(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et, pour tout $s\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}T(f)'(s)&=-\int_0^s tf(t)\mathrm{d}t+(1-s)sf(s)-\int_1^s(1-t)f(t)\mathrm{d}t-s(1-s)f(x)\\&=-\int_0^s tf(t)\mathrm{d}t-\int_1^s(1-t)f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

sous cette forme, $T(f)'$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. On peut dériver et obtenir :

$$T(f)''(s)=-sf(x)-(1-s)f(s)=-f(s)$$

On a bien $T(f)$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et $T(f)''=-f$ pour tout $f\in E$.

Q13. Soit $f\in\ker T$. On a $T(f)=0$ donc $T(f)''=0=-f$. Ainsi $f=0$. L'endomorphisme T est injectif.

Q14. Si $g=T(f)$ alors g est de classe $\mathscr{C}^2$ donc $\operatorname{Im}T\subset\mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. De plus $g(0)=g(1)=0$ donc

$$\operatorname{Im}T\subset\left\{g\in\mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}),g(0)=g(1)=0\right\}=G.$$

Réciproquement soit $g\in G$. On cherche $f\in E$ telle que $g=T(f)$. Si c'est le cas, alors $g''=T(f)''=-f$ donc $f=-g''$. Il suffit donc de prouver que $-g''$ convient c'est-à-dire que $g=T(-g'')$.

On propose deux versions :

- On note $h=g+T(g'')$. On a $h(0)=h(1)=0$ par hypothèse sur g. De plus $h''=g''+T(g'')''=g''-g''=0$. La fonction h est affine, s'annule en 0 et 1 donc h est la fonction nulle sur $[0,1]$. On en déduit que $g+T(g'')=0$ soit encore $g=T(-g'')\in\operatorname{Im}T$.
- on calcule $T(g'')$ en intégrant par parties (avec $g(0)=g(1)=0$) :

$$\begin{aligned}T(g'')(s)&=(1-s)\int_0^s tg''(t)\mathrm{d}t+s\int_s^1(1-t)g''(t)\mathrm{d}t\\&=(1-s)\left(\left[tg'(t)\right]_0^s-\int_0^s g'(t)\mathrm{d}t\right)+s\left(\left[(1-t)g'(t)\right]_s^1+\int_s^1 g'(t)\mathrm{d}t\right)\\&=s(1-s)g'(s)-(1-s)(g(s)-g(0))-s(1-s)g'(s)+s(g(1)-g(s))\\&=-g(s)\end{aligned}$$

Q15. Soit λ non nul et $f\in E$ tels que $T(f)=\lambda f$. On a notamment $f=\frac{1}{\lambda}T(f)$ donc f est de classe $\mathscr{C}^2$. Cela permet de dériver la relation $T(f)=\lambda f$. On en déduit que f est solution de $T(f)''=\lambda f''$, c'est-à-dire $\lambda f''=-f$.

Q16. On sait que T est injective donc 0 n'est pas valeur propre de T. Soit $\lambda\neq0$ et soit f telle que $T(f)=\lambda f$: on a $f\in\operatorname{Im}T$ donc $f(0)=f(1)=0$ et $f''+\frac{1}{\lambda}f=0$.

- cas 1 : $\lambda<0$. On écrit $\frac{1}{\lambda}=-\mu^2$. On a alors f sous la forme $f(x)=A\operatorname{ch}(\mu x)+B\operatorname{sh}(\mu x)$. Les conditions $f(0)=f(1)=0$ donnent $A=B=0$ et $f=0$. Les réels strictement négatifs ne sont pas des valeurs propres
- cas 2 : $\lambda>0$. On écrit $\frac{1}{\lambda}=\mu^2$ (avec $\mu>0$). On a alors f sous la forme $f(x)=A\cos(\mu x)+B\sin(\mu x)$. Les conditions $f(0)=f(1)=0$ donnent $A=0$ et $B\sin\mu=0$. Si $\sin\mu\neq0$ alors B est nul donc λ n'est pas valeur propre. S'il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mu=k\pi$ alors B peut être quelconque.

Bilan : si λ est valeur propre de T alors il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $\lambda=\frac{1}{(k\pi)^2}$ et les fonctions propres associées possibles sont les multiples de $f_k:x\mapsto B\sin(k\pi x)$. Il reste à vérifier qu'elles conviennent.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On cherche déterminer $T(f_k)$. On sait que $T(f_k)''=-f_k$. On en déduit qu'il existe des constantes a et b telles que $T(f_k)(x)=\frac{1}{k^2\pi^2}\sin(k\pi x)+ax+b$. En évaluant en 0 et 1, on trouve $a=b=0$ et $T(f_k)(x)=\frac{1}{k^2\pi^2}f_k(x)$ pour tout $x\in[0,1]$. Cela donne $T(f_k)=\frac{1}{k^2\pi^2}f_k$.

Bilan : les valeurs propres de T sont les réels $\frac{1}{k^2\pi^2}$ pour $k\in\mathbb{N}^*$. L'espace propre associé à l'une de ces valeurs propres est de dimension 1, engendré par la fonction $f_k:x\mapsto\sin(k\pi x)$.

Q17. On a

$$\begin{aligned}\left\langle T(f),g\right\rangle&=-\left\langle T(f),T(g'')\right\rangle=-\int_0^1 T(f)(s).T(g)''(s)\mathrm{d}s\\&=-\left[T(f)(s).T(g)'(s)\right]_0^1+\int_0^1 T(f)'(s)T(g)'(s)\mathrm{d}s\\&=\int_0^1 T(f)'(s)T(g)'(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

On a alors $\left\langle f,T(g)\right\rangle=\left\langle T(g),f\right\rangle=\int_0^1 T(g)'(s)T(f)'(s)\mathrm{d}s$ et finalement $\left\langle T(f),g\right\rangle=\left\langle f,T(g)\right\rangle$ pour tout $f,g\in E$.

Q18. On suppose que H n'est pas l'espace nul et on prend une fonction f comme indiquée dans la proposition admise. En appliquant les résultats de la partie préliminaire, on en déduit que f est une fonction propre pour T : il existe λ tel que $T(f) = \lambda f$ avec $f \in H = G^\perp$. D'après les calculs précédents, f est dans G. Finalement $F \in G \cap G^\perp$ donc f est la fonction nulle. On a bien $H = \{0\}$.

Q19. On linéarise pour calculer l'intégrale : soit $p, q \in \mathbb{N}^*$,

$$\langle f_p, f_q\rangle = \int_0^1 2\sin(p\pi t)\sin(q\pi t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \cos((p-q)\pi t) + \cos((p+q)\pi t)\mathrm{d}t$$

Puisque $\displaystyle\int_0^1 \cos(k\pi t)\ t = \left[\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\right]_0^1 = 0$ si $k \in \mathbb{Z}^*$, on en déduit que $\langle f_p, f_q\rangle = 0$ si $p \neq q$ et $\langle f_p, f_p\rangle = 1$ si $p \in \mathbb{N}^*$. La famille $(g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormale.

Q20. On note $u_k : x \mapsto \dfrac{1}{k^2\pi}\langle f, g_k\rangle g_k$. On a $|\langle f, g_k\rangle| \leqslant \|f\|\,\|g_k\| = \|f\|$. On a donc $\|u_k\|_\infty \leqslant \dfrac{\sqrt{2}\|f\|}{k^2\pi^2}$ et ainsi la série de fonctions continues $\sum u_k$ converge normalement sur $[0,1]$. On en déduit que Φ est continue sur $[0,1]$.

Q21. On a $T(f_N) = \displaystyle\sum_{k=1}^N \langle f, g_k\rangle T(g_k)$ avec $T(g_k) = \dfrac{1}{k^2\pi^2}g_k$. La convergence normale de $\sum u_k$ sur $[0,1]$ nous donne que $\|T(f_N) - \Phi\|_\infty$ tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$. Puisque la norme $\|.\|$ est dominée par la norme infinie, on bien

$$\lim_{N\to+\infty} \|T(f_N) - \Phi\| = 0.$$

Q22. Si on note $\mathcal{P}_N = \mathrm{Vect}(g_1, \dots, g_N)$, la fonction f_N est le projeté orthogonal de f sur $\mathcal{P}_N$. Le fait que la famille soit totale indique que $\|f_N - f\|$ tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$: si on se donne $\varepsilon > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ et une fonction g dans $\mathcal{P}_m$ tel que $\|f - g\| < \varepsilon$. On a par propriété du projeté orthogonal $\|f - f_m\| \leqslant \|f - g\| < \varepsilon$. Par décroissance, pour tout $N \geqslant m$, $\|f - f_N\| < \varepsilon$.
Puisque (f_N) converge vers f et que T est continue sur E, on en déduit que $T(f_N)$ converge vers $T(f)$. Comme elle converge aussi vers Φ, on en déduit que $T(f) = \Phi$.

Exemples d'espaces à noyau reproduisant

III.A - Un exemple

Q23. On a rapidement l'existence, la linéarité, la symétrie et la positivité. Si $\langle f, f\rangle = 0$, alors $\displaystyle\int_0^1 f'(t)^2\mathrm{d}t = 0$. Puisque f'^2 est positive et continue par morceaux, elle est nulle sur $[0,1]$ sauf en un nombre fini de valeurs. Quitte à ajouter $x_0 = 0$ et $x_n = 1$, on a une subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[0,1]$ telle que f est continue sur chaque $[x_i, x_{i+1}]$ de dérivée nulle sur $]x_i, x_{i+1}[$. La fonction est constante sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Par continuité aux points x_i, ces constantes sont identiques. Puisque $f(0) = f(1) = 0$, la fonction est bien nulle.

Q24. Pour $x \in [0,1]$, $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$. On a $f(0) = 0$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|f(x)| = \left|\int_0^x 1.f'(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_0^x \mathrm{d}t.\int_0^x f'(t)^2\mathrm{d}t} = \sqrt{x\int_0^x (f'(t))^2\mathrm{d}t}$$

Q25. Soit $s \in [0,1]$. L'application k_s continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[0,1]$ avec $k_s'(t) = 1 - s$ si $t <$ et $k_s'(t) = -s$ si $t > s$ (pas dérivable en s). On peut réaliser l'intégration par parties et

$$\int_0^1 k_s'(t)f'(t)\mathrm{d}t = [f'(t)k_s(t)]_0^1 - \int_0^1 k_s(t)f''(t)\mathrm{d}t$$

Puisque $k_s(0) = k_s(1) = 0$, il vient $U(f)(s) = -\displaystyle\int_0^1 k_s(t)f''(t)\mathrm{d}t = -T(f'')(s)$.
On refait la même démonstration que précédemment (question sur Im T) pour justifier que $T(f'') = -f$. On en déduit que $U(f) = f$.

Q26. On a

$$U(f)(s) = (1-s)\int_0^s f'(t) - s\int_s^1 f'(t)\mathrm{d}t = (1-s)\int_0^s f'(t) + s\int_1^s f'(t)\mathrm{d}t$$

Si on justifie que, pour $a, b \in [0,1]$, $\displaystyle\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$, on aura alors

$$U(f)(s) = (1-s)(f(s) - f(0)) + s(f(s) - f(1)) = f(s)$$

On revient au résultat admis : on prend une subdivision $a_0 < a_1 < \ldots < a_N = b$ de $[a,b]$ de sorte que la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et se prolonge de façon $\mathscr{C}^1$ sur $[a_i, a_{i+1}]$. On a alors

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to a_{i+1}^-} f(x) - \lim_{x\to a_i^+} f(x) = f(a_{i+1}) - f(a_i)$$

par continuité de f sur $[0,1]$. En sommant ces intégrales, il vient bien $\displaystyle\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$.

Q27. on vérifie les trois propriétés demandées pour être un espace à noyau reproduisant :

- E_1 est bien un sous-espace vectoriel des fonctions sur $[0,1]$ à valeurs réelles,

- la question 24 donne presque
$$|V_x(f)| \leqslant \sqrt{x}\,\|f'\| \leqslant \|f'\|$$
donc, pour tout $x \in I$, l'application V_x est continue de $(E_1, \|\cdot\|)$ dans $(R, |\cdot|)$.
Sauf qu'on a le résultat que pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = 0$. Heureusement la démonstration précédente permet d'écrire à nouveau $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t$ et ensuite d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz (la positivité de la forme bilinéaire symétrique suffit - on n'a pas besoin du cas d'égalité).
- si $x \in [0,1]$ et $f \in E_1$,
$$f(x) = U(f)(x) = \int_0^1 k_x'(t) f'(t)\mathrm{d}t = \langle k_x, f\rangle$$
L'application K est bien un noyau reproduisant.

On en déduit que $(E_1, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace à noyau reproduisant.

III.B - un contre-exemple

Q28. Supposons que $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ soit à noyau reproduisant. La propriété à mettre en défaut est plutôt la continuité de $f \mapsto f(x)$ - on vérifie que $f \mapsto f(1)$ n'est pas continue. Soit $f_n : t \mapsto t^n$. On a $V_1(f_n) = 1$. On a également $\|f_n\|^2 = \int_0^1 t^{2n}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2n+1}$ donc $\|f_n\| = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ est de limite nulle. La suite de fonctions (f_n) converge vers la fonction nulle (pour la norme). Or $V_1(f_n) = 1$ et $V_1(0) = 0$ donc V_1 n'est pas continue.

III.C - Fonctions développables en série entière

Q29. Puisque $\sum a_n^2$ converge, la suite a_n^2 tend vers 0 donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ également. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n 1^n = 0$ donc le rayon de convergence de la série entière est au moins égal à 1.

Q30. On a $(a_n+b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_nb_n \leqslant 2(a_n^2+b_n^2)$. On en déduit que si f et g sont dans E_2, alors $f+g$ également. On a immédiatement que $\lambda f \in E_2$ et E_2 contient la fonction nulle. Finalement E_2 est un sous-espace vectoriel des fonctions continues sur $]-1,1[$. De plus (avec les notations de la question), $|a_nb_n| \leqslant \frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$ donc $\langle f, g\rangle$ est défini. On vérifie alors facilement la bilinéarité, la symétrie et le caractère positif et défini (si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n^2 = 0$ alors tous les termes a_n sont nuls et $f = 0$.

Q31. Si $g_x(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n(x) t^n$, on voit que $b_n(x) = x^n$ permet d'avoir $\langle g_x, f\rangle = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x)$. On considère donc cette série entière avec $b_n = x^n$. Puisque $|x| < 1$, la série entière $\sum x^n t^n$ (variable t) a un rayon de convergence $1/|x|$ (si $x \neq 0$) ou infini si $x = 0$. Dans tous les cas, le rayon de convergence est au moins 1. Ainsi $g_x : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n t^n = \dfrac{1}{1-xt}$ convient.

Q32. La propriété manquante est la continuité de V_x si $x \in]-1,1[$. Soit $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ dans E_2. On a
$$|V_x(f)|^2 = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right|^2 \leqslant \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2\right).\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}\right)$$
Cela donne $|V_x(f)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\|f\|$ et ainsi la continuité de l'application linéaire V_x (x est bien entendu fixé dans $]-1,1[$). Son noyau est l'application $K : (x,t) \in]-1,1[^2 \mapsto \dfrac{1}{1-xt}$.

III.D - Autre exemple parmi les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux

Q33. On a bien un sous-espace vectoriel de fonction de $I = [0,a]$ dans $\mathbb{R}$. La continuité de V_x se fait de la même manière que précédemment ($f(x) = \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$ et inégalité de Cauchy-Schwarz. On note $K(x,y) = \min(x,y) = k_x(y)$. On a $k_x(y) = y$ sur $[0,x]$ et $k_x(y) = x$ si $x \geqslant y$. On a alors $k_x'(y) = 1$ sur $[0,x[$ et 0 sur $]x,a]$, tout cela pour x fixé dans $[0,a]$. On a alors
$$\langle k_x, f\rangle = \int_0^x 1.f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(0) = f(x)$$
pour les mêmes raisons que précédemment. La fonction donnée est bien un noyau reproduisant sur $(E_3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Q34. On essaie de s'inspirer des questions précédentes. L'application φ est strictement décroissante et réalise une bijection de $[0,a]$ sur $[\varphi(a), 0]$. On note $b = \varphi(a) < 0$. L'application φ^{-1} est donc une bijection strictement décroissante de $[b,0]$ sur $[0,a]$. On note toujours $k_x(y) = \min(\varphi(x), \varphi(y))$. On a $k_x'(y) = 0$ si $y \leqslant x$ et $k_x'(y) = \varphi'(y)$ si $y > x$. C'est donc la partie entre $\varphi(x)$ et a qui est prise en compte. Comme cette fois c'est $f(a)$ qui est nul, on a $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ ou $f(x) = -\int_x^a f'(t)\mathrm{d}t$. Puisque $k_x'(y)$ vaut $\varphi'(y)$ entre x et a, on a $f(x) = -\int_x^a f'(y)\varphi'(y)\dfrac{\mathrm{d}y}{\varphi'(y)} = -\int_0^a f'(y)k_x'(y)\dfrac{\mathrm{d}y}{\varphi'(y)}$. On pose alors
$$\langle f, g\rangle = \int_0^a f'(t)g'(t)\left(-\frac{1}{\varphi'(t)}\right)\mathrm{d}t$$

Les calculs précédents donnent bien $f(x) = \langle f, k_x \rangle$ et E_4 avec ce produit scalaire est à noyau reproduisant (avec $K(x,y) = \min(\varphi(x), \varphi(y))$).

Quelques résultats sur les espaces à noyau reproduisant

IV.A - Continuité

Q35. Soit $f \in E$ telle que $\|f\| = 1$. On a,

$$|f(x)| = |V_x(f)| = \left|\langle f, k_x \rangle\right| \leqslant \|k_x\| \, \|f\| = \|k_x\|$$

De plus l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité lorsque les fonctions sont colinéaires. En prenant $f = \dfrac{k_x}{\|k_x\|}$ si k_x n'est pas identiquement nulle, on obtient

$$\left|f(x)\right| = \left|\frac{\langle k_x, k_x\rangle}{\|k_x\|}\right| = \|k_x\|.$$

Ainsi $N(V_x) = \sqrt{\langle k_x, k_x\rangle}$. Lorsque k_x est la fonction nulle, la majoration par $\|k_x\| = 0$ donne le résultat.

Q36. Soit $f \in E$. Pour $x \in I$, $f(x) = \langle f, k_x \rangle$. Par de théorème directe pour la continuité, on doit le faire « à la main ».

$$|f(x) - f(y)| = \left|\langle f, k_x - k_y \rangle\right| \leqslant \|f\| \, \|k_x - k_y\|$$

Puisque $\|f\|$ est une constante, on doit montrer que $\lim\limits_{y\to x} \|k_x - k_y\| = 0$ ou plus simplement $\lim\limits_{y\to x} \|k_x - k_y\|^2 = 0$.

$$\begin{aligned}
\|k_x - k_y\|^2 &= \langle k_x - k_y, k_x - k_y \rangle \\
&= \langle k_x, k_x \rangle - 2\langle k_x, k_y \rangle + \langle k_y, k_y \rangle \\
&= k_x(x) - 2k_x(y) + k_y(y) = K(x,x) - 2K(x,y) + K(y,y).
\end{aligned}$$

Par continuité de K sur $I \times I$, $\lim\limits_{y\to x} K(x,x) - 2K(x,y) + K(y,y) = K(x,x) - 2K(x,x) + K(x,x) = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{y\to x} |f(x) - f(y)| = 0$ et que f est continue en x pour tout $x \in I$. Les fonctions de E sont donc continues sur I.

IV.B - Construction d'un espace à noyau reproduisant

Q37.

- $T(f)$ existe et est continue sur E : l'existence est immédiate (on intègre une fonction continue sur un segment). Pour la continuité, on applique le théorème de continuité sous intégrale. On note $h(x,t) = A(x,t)f(t)$.
  - — pour tout $x \in [0,1]$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[0,1]$,
  - — pour tout $t \in [0,1]$, $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[0,1]$,
  - — h est continue sur $[0,1]^2$ donc bornée. Il existe M telle que $|h| \leqslant M$. La fonction constante M est continue et intégrable sur $[0,1]$.

  le théorème de continuité s'applique et ainsi $T(f)$ est dans E.
- L'application est linéaire, à valeurs dans $\operatorname{Im} T$. On note $\tilde{T}$ la restriction de T de $(\ker T)^{\perp}$ vers $\operatorname{Im} T$.
- Puisque $\ker T$ est de dimension finie, $(\ker T)^{\perp}$ est un supplémentaire de $\ker T$. On peut donc appliquer l'isomorphisme du rang et T induit une bijection de $(\ker T)^{\perp}$ sur $\operatorname{Im} T$. Dans le doute (a-t-on le théorème en dimension infinie ?), on le redémontre facilement en séparant injectivité et surjectivité.

Q38.

- $F = \operatorname{Im} T$ est un sous-espace vectoriel de E et F est un sous-espace de fonctions de I dans $\mathbb{R}$.
- l'application φ est bien définie sur $\operatorname{Im} T^2$. Puisque T et S sont linéaires, φ est bilinéaire. ON a directement la symétrique de φ ainsi que la positivité. Si $\varphi(f,f) = 0 = \|S(f)\|^2$, alors $S(f) = 0$ et comme S est bijective, $f = 0$. On a donc bien un produit scalaire sur $\operatorname{Im} T$.
- on vérifie tout d'abord la relation $f(x) = \varphi(k_x, f)$. Soit $x \in I$ (où $I = [0,1]$). On note $k_x : y \mapsto K(x,y)$. On a $k_x(y) = \displaystyle\int_0^1 A(y,t)A(x,t)\,\mathrm{d}t$. Si on note $u_x : t \mapsto A(x,t)$, alors $k_x(y) = \displaystyle\int_0^1 A(y,t)u_x(t)\,\mathrm{d}t\, T(u_x)(y)$. On a donc

  $$k_x = T(u_x) \text{ c'est-à-dire } u_x = S(k_x) \text{ où } u_x(t) = A(x,t).$$

  On a alors, pour $f \in \operatorname{Im} T$: pour $x \in I$

  $$\varphi(k_x, f) = \langle S(k_x), S(f) \rangle = \langle u_x, S(f) \rangle = \int_0^1 A(x,t)S(f)(t)\,\mathrm{d}t = T(S(f))(x) = f(x).$$

  On a bien, pour tout $x \in I$, $f(x) = \varphi(k_x, f) = \langle u_x, S(f) \rangle$.
- une fois cette formule obtenue, $|f(x)| \leqslant \|k_x\|' \, \|f\|'$ où $\|\cdot\|'$ est la norme associée au produit scalaire φ. Cela donne (comme avant) la continuité de $f \mapsto f(x)$.

On a bien montré que $(\operatorname{Im} T, \varphi)$ est un espace à noyau reproduisant.