Un exercice

Q1. a/ Comme il n'y a que deux variables X_1, X_2, l'ensemble des valeurs prises par ces variables est de cardinal 1 ou 2 : $U_2(\Omega) = \{1,2\}$ (les deux cardinaux sont possibles).

b/ $(U_2 = 1) = (X_1 = X_2) = \biguplus_{k=1}^{\ell} ((X_1 = k) \cap (X_2 = k))$. Les variables X_1, X_2 sont indépendantes donc

$$\mathbb{P}(U_2 = 1) = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = k) = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{\ell^2} = \frac{1}{\ell}$$

On en déduit $\mathbb{P}(U_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(U_1 = 1)$.

$$\boxed{\mathbb{P}(U_2 = 1) = \frac{1}{\ell} \text{ et } \mathbb{P}(U_2 = 2) = 1 - \frac{1}{\ell}}$$

c/ L'espérance vaut $\mathbb{P}(U_2 = 1) + 2\mathbb{P}(U_2 = 2)$ et donc $\mathbb{E}(U_2) = 2 - \frac{1}{\ell}$

Q2.

Q3. La variable aléatoire U_n prend des valeurs entières à partir de 1. Sa valeur maximale ne peut pas dépasser le nombre n de variable aléatoire X_k, ni le nombre de valeurs possibles ℓ. On a donc $U_n(\Omega) = [\![1\,;m]\!]$ où $m = \min(n, \ell)$.

Q4. puisque X_i suit une loi uniforme sur $[\![1\,;\ell]\!]$, $\mathbb{P}(X_i \in S) = \frac{|S|}{\ell}$.

Q5. De nouveau par indépendance,

$$\mathbb{P}(X_1 \neq a, \dots, X_{n-1} \neq a) = \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_i \neq a) = \left(\frac{\ell - 1}{\ell}\right)^{n-1}$$

Q6. on filtre suivant la valeur de X_n :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) &= \mathbb{P}\left(\biguplus_{a=1}^{\ell} X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n, X_n = a\right) \\
&= \sum_{a=1}^{\ell} \mathbb{P}(X_1 \neq a, \dots, X_{n-1} \neq a, X_n = a) \\
&= \sum_{a=1}^{\ell} \mathbb{P}(X_1 \neq a, \dots, X_{n-1} \neq a).\mathbb{P}(X_n = a) \\
&= \ell\left(\frac{\ell-1}{\ell}\right)^{n-1} \frac{1}{\ell} = \left(\frac{\ell-1}{\ell}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Q7. cette fois on effectue une partition sur les valeurs prises par $X_1, \dots, X_{n-1}$ et avec X_n qui n'est pas l'une de ces valeurs :

$$(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \biguplus_{S \in \mathcal{P}_\ell} (\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S, X_n \notin S)$$

par indépendance (les événements $\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S$ et $X_n \notin S$ sont indépendants par le lemme des coalitions), et puisque $\mathbb{P}(X_n \notin S) = \frac{\ell - |S|}{\ell}$, on a le résultat demandé.

Q8. Tout d'abord $\mathbb{E}(U_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} k\mathbb{P}(U_{n-1} = k)$. L'événement $U_{n-1} = k$ est la réunion des événements $\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S$ lorsque S décrit l'ensemble des parties à $k = |S|$ éléments de $\mathcal{P}_\ell$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(U_{n-1}) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}\left(\biguplus_{S \in \mathcal{P}_\ell, |S| = k} \{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{S \in \mathcal{P}_\ell, |S| = k} |S|\mathbb{P}(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S)\right) \\
&= \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} |S|\mathbb{P}(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S)
\end{aligned}$$

En reprenant la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) &= \left(\sum_{S \in \mathcal{P}_\ell, |S| = k} \mathbb{P}(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S)\right) \\
&\quad - \frac{1}{\ell}\left(\sum_{S \in \mathcal{P}_\ell, |S| = k} |S|\mathbb{P}(\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S)\right)
\end{aligned}$$

le premier terme entre parenthèses vaut 1 (on a un système complet d'événements en décrivant quelles valeurs peut prendre l'ensemble des X_i). On a donc

$$\mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = 1 - \frac{1}{\ell}\mathbb{E}(U_{n-1})$$

ou encore

$$\mathbb{E}(U_{n-1}) = \ell\,(\mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) - 1)\,.$$

Q9. on reprend les calculs précédents :

$$\mathbb{E}(U_{n-1}) = \ell\left(1 - \left(\frac{\ell-1}{\ell}\right)^{n-1}\right)$$

et ainsi

$$\mathbb{E}(U_n) = \ell\left(1 - \left(\frac{\ell-1}{\ell}\right)^{n}\right) = \ell\left(1 - \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^{n}\right)$$

Q10. On a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(U_n) = \ell$ car $1-\frac{1}{\ell} \in]0,1[$. Lorsque n devient très grand on est quasi certain d'obtenir les ℓ valeurs possibles pour les variables aléatoires X_i.

Q11. En utilisant $(1+u)^alpha - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \alpha u$, on obtient

$$\mathbb{E}(U_n) \underset{\ell\to+\infty}{\sim} \ell\left(n\frac{1}{\ell}\right) = n$$

Lorsque le nombre de valeurs possibles est très grand, les n variables aléatoires ont tendance à être toutes distinctes d'où une espérance proche du nombre de valeurs.

Q12. a/ on est dans la situation précédente : pour chaque personne (numérotée i), on désigne X_i son jour d'anniversaire entre 1 et 365. Les valeurs X_i suivent une loi uniforme sur $[\![1;\ell]\!]$ avec $\ell = 365$ - elles sont de plus supposées indépendantes. Cela donne

$$\mathbb{E}(D_n) = 365\left(1-\left(\frac{364}{365}\right)^n\right)$$

b/ la limite est $\ell = 365$

CCINP 2020

PARTIE I - Développement ternaire

Étude de l'application σ

Q1.
- on a l'existence de $\|u\|$ puisque l'ensemble $\{|u_n|, n\in\mathbb{N}\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.
- La suite nulle est dans ℓ^∞. Si u et v sont deux suites bornées et λ un réel, alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n+\lambda v_n| \leqslant |u_n| + |\lambda||v_n| \leqslant \|u\| + |\lambda|\,\|v\|$. La suite $u+\lambda v$ est encore dans ℓ^∞. On a donc bien un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.
- On vient de montrer que $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$. Si $\|u\| = 0$, alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0 \leqslant |u_n| \leqslant \|u\| = 0$ donc tous les termes de la suite sont nuls et $u = 0$. Enfin si $\lambda\in\mathbb{R}$, $\sup\{|\lambda u_n|, n\in\mathbb{N}\} = \sup\{|\lambda||u_n|, n\in\mathbb{N}\} = |\lambda|\sup\{|u_n|, n\in\mathbb{N}\}$ car $|\lambda| \geqslant 0$. On a donc $\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|$. L'application est bien une norme sur ℓ^∞.

Q2. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left|\frac{u_n}{3^n}\right| \leqslant \frac{\|u\|}{3^n}$. La série géométrique $\sum\frac{1}{3^n}$ converge (raison $q = \frac{1}{3}$). Par comparaison, la série $\sum\frac{u_n}{3^n}$ converge absolument donc converge.

Q3. L'application est bien à valeurs réels. Puisque les séries qui apparaissent convergent toutes, on a (si u, v sont dans ℓ^∞ et $\lambda\in\mathbb{R}$) :

$$\sigma(u+\lambda v) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n+\lambda v_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{3^n} + \lambda\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{v_n}{3^n} = \sigma(u) + \lambda\sigma(v)$$

et l'application est linéaire. Enfin si $u\in\ell^\infty$,

$$|\sigma(u)| \leqslant \|u\|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n} = \|u\|\,\frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2}\|u\|.$$

L'application σ est donc une forme linéaire continue sur ℓ^∞.

Q4. Les termes étant positifs, la somme est positive (elle est nulle avec la suite nulle). Pour $t\in T$, on a également

$$\sigma(u) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{3^n} = 2\frac{1/3}{1-1/3} = 1$$

pour tout $t\in T$, $\sigma(t)\in[0,1]$.

Q5. On a $\sigma(\tau) = \frac{1}{3}$. On a également

$$\sigma(\tau') = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{3^n} = 2\frac{(1/3)^2}{1-1/3} = \frac{1}{3}$$

Finalement $\sigma(\tau) = \sigma(\tau') = \frac{1}{3}$ avec $\tau \neq \tau'$. L'application σ n'est donc pas injective.

Développement ternaire propre

Q6. On note $p = \lfloor 3^{n-1}x\rfloor$. On a donc $p \leqslant 3^{n-1}x < p+1$ et ainsi $3p \leqslant 3^n x < 3p+3$. On a alors

$$3p-3p \leqslant t_n(x) < 3p+3-3p = 3$$

De plus $t_n(x)$ est un entier donc $t_n(x)\in\{0,1,2\}$. La suite $t(x)$ est bien dans T.

Q7. On vérifie les différentes propriétés :
- $x_n - x_{n-1} = \frac{1}{3^n}\left(\lfloor 3^n x\rfloor - 3\lfloor 3^{n-1}x\rfloor\right) = \frac{t_n(x)}{3^n} \geqslant 0$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante
- $y_n - y_{n-1} = x_n - x_{n-1} + \frac{1}{3^n} - \frac{3}{3^n} = \frac{t_n(x)-2}{3^n} \leqslant 0$, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante
- $y_n - x_n = \frac{1}{3^n}$ donc la différence tend vers 0

Les deux suites sont adjacentes et convergent vers une même limite. Les calcul précédents donnent également $x_n - x_{n-1} = \frac{t_n(x)}{3^n}$ pour tout $n \geqslant 2$. Pour $n = 1$, on a $\underset{=}{\frac{t_1(x)}{}}\frac{\lfloor 3x\rfloor}{3} = x_1$. Par télescopage,

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{t_n(x)}{3^n} = x_1 + \sum_{n=2}^{N} x_n - x_{n-1} = x_N$$

Par encadrement, $x = \frac{3^N x}{3^N} \leqslant x_N \leqslant \frac{3^N x+1}{3^N} = x + \frac{1}{3^N}$. On en déduit que $\lim_{N\to+\infty} x_N = x$ et ainsi

$$x = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{t_n(x)}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t_n(x)}{3^n}x$$

Cela permet de prouver que tout réel $x \in [0,1]$ est dans l'image de T. L'application T est surjective (et non injective).

PARTIE II - Étude d'une fonction définie par une série

Étude de l'application φ

Q8. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, φ_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_n(x) = \dfrac{1+\sin(nx)}{3^n}$.

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, φ_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $|\varphi_n(x)| \leqslant \dfrac{2}{3^n}$ donc $\sum \varphi_n$ converge normalement et simplement sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_n'(x) = \dfrac{n\cos nx}{3^n}$ et $|\varphi_n'(x)| \leqslant \dfrac{n}{3^n}$. Par croissance comparée $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3}{3^n} = 0$ donc $\dfrac{n}{3^n} = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. La série $\sum \dfrac{n}{3^n}$ converge (*remarque :* on peut aussi utiliser un critère de d'Alembert) donc la série de fonction $\sum \varphi_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

On a toutes les hypothèses pour conclure que φ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Q9. La série $\sum \dfrac{e^{inx}}{3^n}$ converge absolument car $\left|\dfrac{e^{inx}}{3^n}\right| = \dfrac{1}{3^n}$ et la série $\sum \dfrac{1}{3^n}$ converge. On a donc

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Im}\left(\frac{e^{inx}}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{3^n}.$$

De plus $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{1}{2}$. Cela donne bien

$$\frac{1}{2} + \operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right) = \varphi(x).$$

Puisque $\dfrac{e^{inx}}{3} \neq 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n} = \frac{1}{1-\dfrac{e^{ix}}{3}} = \frac{3}{(3-\cos x) - i\sin x)}$$

ce qui donne

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{3\sin x}{(3-\cos x)^2 + \sin^2 x} = \frac{1}{2} + \frac{3\sin x}{10-6\cos x}.$$

Q10. Le théorème de dérivation qui a permis de justifier que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ indique qu'on peut de plus dériver terme à terme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n}$$

cela permet d'obtenir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n} = 3\frac{\cos x(10-6\cos x) - \sin x(6\sin x)}{(10-6\cos x)^2} = 3\frac{10\cos x - 6}{(10-6\cos x)^2}$$

Q11. Les calculs précédents donnent

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) - \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{3^n} = 3\frac{\sin x}{10-6\cos x}$$

La série de fonctions continues $\sum f_n$ où $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{3^n}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,\pi]$. À l'aide du théorème d'intégration terme à terme, on obtient

$$3\int_0^\pi \frac{\sin x}{10-6\cos x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\sin nx}{3^n}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^n}(1-\cos(n\pi))$$

c'est-à-dire

$$3\int_0^\pi \frac{\sin x}{10-6\cos x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^n}\left(1-(-1)^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^n}\left(1+(-1)^{n-1}\right)$$

On utilise le développement en série entière du logarithme. Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \text{ et } -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

ce qui donne

$$3\int_0^\pi \frac{\sin x}{10-6\cos x}\mathrm{d}x = -\ln(1-\frac{1}{3}) + \ln(1+\frac{1}{3}) = \ln\frac{4}{3} - \ln\frac{2}{3} = \ln 2$$

Enfin, on a $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{10-6\cos x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln 2$.

Q12. La seconde version consiste à intégrer directement (fonction sous la forme u'/u) : puisque $10-6\cos x > 0$, on a

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{10-6\cos x}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int_0^\pi \frac{6\sin x}{10-6\cos x}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}[\ln(10-6\cos x)]_0^\pi = \frac{1}{6}(\ln 16 - \ln 4) = \frac{1}{3}\ln 2.$$

PARTIE III - Développements ternaires aléatoires

Q13. Chaque variable aléatoire $T_{n,N}$ est fini donc admet une espérance. Par combinaison linéaire X_N admet une espérance (elle est aussi à valeurs finies). On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}\left(T_{n,N}\right) = 0\mathbb{P}\left(T_{n,N}=0\right) + 1\mathbb{P}\left(T_{n,N}=1\right) + 2\mathbb{P}\left(T_{n,N}=2\right) = 2 - \frac{3}{N}$$

ce qui donne

$$\mathbb{E}\left(X_N\right)(2-\frac{3}{N})\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{3}^n = (2-\frac{3}{N})\frac{1}{3}\frac{1-1/3^n}{1-1/3} = \left(1-\frac{3}{2N}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right).$$

De même les variables aléatoires $T_{n,N}$ et par conséquent X_N sont finies donc admettent une variance. Par indépendance des variables aléatoires $T_{n,N}$,

$$V\left(X_N\right) = \sum_{n=1}^{N} V\left(\frac{T_{n,N}}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{N}\frac{V\left(T_{n,N}\right)}{9^n}$$

Chaque $T_{n,N}$ a la même variance

$$V\left(T_{n,N}\right) = \mathbb{E}\left(T_{n,N}^2\right) - \mathbb{E}\left(T_{n,N}\right)^2 = (4-\frac{7}{N}) - \left(2-\frac{3}{N}\right)^2 = \frac{5}{N} - \frac{9}{N^2}.$$

ce qui donne finalement après calcul de la somme géométrique

$$V\left(X_N\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{5}{N}-\frac{9}{N^2}\right)\left(1-\frac{1}{9^N}\right)$$

Q14. Puisque X_N admet un moment d'ordre 2 (ou X_N est dans L^2), on peut utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, qui donne

$$\mathbb{P}\left(\left|X_N - \mathbb{E}\left(X_N\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leqslant \frac{V\left(X_N\right)}{\varepsilon^2}$$

Le calcul précédent donne une variance de limite nulle lorsque $N \to +\infty$ et ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{N\to+\infty}\mathbb{P}\left(\left|X_N - \mathbb{E}\left(X_N\right)\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Q15. Si $\omega \in \left(\left|X_N - \mathbb{E}\left(X_N\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \left(\left|\mathbb{E}\left(X_N\right) - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$ alors $\omega \in \left(\left|X_N - 1\right| < \varepsilon\right)$ car

$$\left|X_N - 1\right| \leqslant \left|X_N - \mathbb{E}\left(X_N\right)\right| + \left|\mathbb{E}\left(X_N\right) - 1\right|,$$

ce qui donne

$$\left(\left|X_N - \mathbb{E}\left(X_N\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \left(\left|\mathbb{E}\left(X_N\right) - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \left(\left|X_N - 1\right| < \varepsilon\right)$$

en passant aux complémentaires, on a

$$\left(\left|X_N - 1\right| \geqslant \varepsilon\right) \subset \left(\left|X_N - \mathbb{E}\left(X_N\right)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \left(\left|\mathbb{E}\left(X_N\right) - 1\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Puisque $\mathbb{P}\left(A \cup B\right) \leqslant \mathbb{P}\left(A\right) + \mathbb{P}\left(A\right)$, on obtient, par croissance de la probabilité,

$$\mathbb{P}\left(\left|X_N - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|X_N - \mathbb{E}\left(X_N\right)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\left|\mathbb{E}\left(X_N\right) - 1\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Le calcul précédent donne $\mathbb{E}\left(X_N\right) = \left(1-\frac{3}{2N}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$ et ainsi $\lim\limits_{N\to+\infty}\mathbb{E}\left(X_N\right) = 1$. Il existe donc N_0 tel que, pour tout $N \geqslant N_0$, $\left|\mathbb{E}\left(X_N\right) - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ et ainsi $\mathbb{P}\left(\left|\mathbb{E}\left(X_N\right) - 1\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$. Pour tout $N \geqslant N_0$, on a donc

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(\left|X_N - 1\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|X_N - \mathbb{E}\left(X_N\right)\right| \geqslant \varepsilon/2\right)$$

et par encadrement, la limite est nulle. On a bien montré que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{N\to+\infty}\mathbb{P}\left(\left|X_N - 1\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

PARTIE IV - Fonction de Cantor-Lebesgue

Étude d'une suite de fonctions

On note f_0 la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_0(x) = x$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(3x)}{2} & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[\\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{f_n(3x-2)}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}.$$

Q16. On vérifie par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que f_n est à valeurs dans $[0,1]$: c'est le cas pour f_0. Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel f_n est à valeurs dans $[0,1]$:

- si $x \in [0,1/3]$ alors $3x \in [0,1]$ et $f_{n+1}(x) \in [0;1/2]$,
- si $x \in [1/3;2/3[$, c'est immédiat
- si $x \in [2/3;1]$, on a $f_{n+1}(x) \in [1/2;1]$ (et $3x-2 \in [0,1]$)

Q17. On le démontre également par récurrence sur n en divisant le segment en 3.

- *initialisation :* on a $f_0(x) = x$ et
  - si $x \in [0;1/3]$, $f_1(x) = \frac{x}{2}$ donc $f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{x}{2}$ et $\left|f_{n+1}(x) - f_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{6}$,
  - si $x \in [1/3;2/3[$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{2} - x \in [-\frac{1}{6};\frac{1}{6}]$,

   - si $x \in [2/3;1]$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2}$ dont les valeurs extrêmes sont $-\frac{1}{6}$ et 0.

  On a bien, pour tout $x \in [0,1]$, $\left|f_{n+1}(x) - f_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{6}$.
- si le résultat est vrai pour un certain entier $n-1 \in \mathbb{N}$, alors
   - si $x \in [0;1/3]$, $\left|f_{n+1}(x) - f_n(x)\right| = \frac{1}{2}\left|f_n(3x) - f_{n-1}(3x)\right| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{6\times 2^n} = \frac{1}{6\times 2^{n+1}}$,
   - si $x \in [1/3;2/3[$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0$,
   - si $x \in [2/3;1]$, $\left|f_{n+1}(x) - f_n(x)\right| = \frac{1}{2}\left|f_n(3x-2) - f_{n-1}(3x-2)\right| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{6\times 2^n} = \frac{1}{6\times 2^{n+1}}$,

  Par récurrence, on a obtenu le résultat pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q18. On a convergence normale sur $[0,1]$ de la série de fonctions $\sum\left(f_{n+1} - f_n\right)$ et donc convergence uniforme sur $[0,1]$. Cela revient à dire que la suite des sommes partielles converge uniformément sur $[0,1]$. Or $\sum_{k=0}^{n-1}\left(f_{k+1} - f_k\right) = f_n - f_0$. On a donc convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions (f_n).

Q19. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que f_n est continue sur $[0,1]$, croissante sur $[0,1]$, que $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$ et que f_n vaut $\frac{1}{2}$ sur $[1/3;2/3]$.
- les dessins du départ le vérifie pour $n = 1$ et $n = 2$.
- si la propriété est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors
   - f_{n+1} est continue est croissante sur $[0,1/3]$ avec $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1/3} f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}f_n(1) = \frac{1}{2}$.
   - la fonction est constante égale à $1/2$ sur $[1/3;2/3[$. On a la croissance, la continuité sur $]1/3;2/3[$ avec une limite $1/2$ en $1/3$ à droite et à gauche donc la continuité en $1/3$,
   - $x \mapsto 3x-2$ réalise un bijection continue et croissante de $[2/3;1]$ sur $[0,1]$. On en déduit que f_{n+1} est continue sur $]2/3;1]$, croissante, que $\lim\limits_{x\to 1} f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_n(1) = 1$ et que $\lim\limits_{x\to 2/3^+} f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_n(0) = 1/2$ ce qui redonne la continuité en $2/3$.

  On a donc toutes les propriétés demandées pour f_{n+1}.

  Par convergence uniforme, la fonction limite f est continue sur $[0,1]$. Si $x \leqslant y$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \leqslant f_n(y)$ donc en limite $f(x) \leqslant f(y)$. La fonction est donc croissante. Puisque $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$ pour tout n, la fonction f prend les mêmes valeurs. Par théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f est surjective de $[0,1]$ vers $[0,1]$ (mais pas bijective car elle est constante égale à $1/2$ sur $[1/3;2/3]$.