Un exercice

— Soient a et b des entiers naturels tels que $a \leqslant b$. Si S est un ensemble fini, on note $|S|$ son cardinal.

— Si X est une variable à valeur dans une partie finie de $\mathbb{N}$, on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance.

— Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit ℓ un entier naturel non nul. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'ensemble $[\![1;\ell]\!]$.

— On note U_n le nombre de valeurs distinctes prises par les variables $X_1, \dots, X_n$: si $k_1, \dots, k_n$ sont les valeurs prises respectivement par $X_1, \dots, X_n$, alors U_n prend la valeur $|S|$ où $S = \{k_1, \dots, k_n\}$ pour tout $(k_1, \dots, k_n) \in [\![1;\ell]\!]^n$.

— Si S est une partie de $[\![1;\ell]\!]$, on note $\{X_1, \dots, X_n\} = S$ la réunion des événements $(X_1, \dots, X_n) = (k_1, \dots, k_n)$ pour tout $(k_1, \dots, k_n) \in [\![1;\ell]\!]^n$ tels que $S = \{k_1, \dots, k_n\}$.

Q1. On suppose dans cette question seulement que $n = 2$ et $\ell \geqslant 2$.

a/ Justifier que U_2 ne prend que les valeurs 1 et 2.

b/ Calculer $\mathbb{P}(U_2 = 1)$ et $\mathbb{P}(U_2 = 2)$.

c/ Calculer $\mathbb{E}(U_2)$.

Q2. On se propose de simuler en Python la variable aléatoire U_n pour $n = 10$ dans le cas où $\ell = 25$.

a/ Ecrire une fonction `simulU` qui renvoie une réalisation de U_{10}.
On pourra utiliser la fonction `random.randint`.
L'instruction `random.randint(1,25)` fournit un nombre aléatoire dans $[\![1;25]\!]$ uniformément.

b/ Ecrire une fonction `espU` qui renvoie une approximation de l'espérance de U_{10}. Quel théorème utilisez-vous pour justifier que le résultat de cette fonction est une approximation de l'espérance de U_{10} ? Enoncez précisément ce théorème.

Q3. Quel est l'ensemble des valeurs prises par U_n ?

Q4. Soit i dans $[\![1;n]\!]$. Soit S une partie de $[\![1;\ell]\!]$. Quelle est la probabilité de l'événement $(X_i \in S)$ en fonction de $|S|$?

Q5. Soit a dans $[\![1;\ell]\!]$. Exprimer $\mathbb{P}(X_1 \neq a, \dots, X_{n-1} \neq a)$, la probabilité qu'aucune des variables $X_1, \dots, X_{n-1}$ ne prenne la valeur a, en fonction de n et ℓ.

Q6. En déduire $\mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n)$, la probabilité que la valeur prise par X_n soit différente de toutes les valeurs prises par les autres variables, en fonction de n et ℓ.

Q7. Justifier

$$\mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} \mathbb{P}((\{X_1, \dots, X_{n-1}\} = S)\left(\frac{\ell - |S|}{\ell}\right)$$

où $\mathcal{P}_\ell$ désigne l'ensemble des parties non vides de $[\![1;\ell]\!]$.

Q8. En déduire dans le cas où $n \geqslant 3$:

$$\mathbb{E}(U_{n-1}) = \ell(1 - \mathbb{P}(X_1 \neq X_n, \dots, X_{n-1} \neq X_n))$$

Q9. Exprimer $\mathbb{E}(U_n)$ en fonction de n et ℓ.

Q10. Déterminer la limite de $\mathbb{E}(U_n)$ lorsque ℓ est fixé et $n \to +\infty$. Interprétez votre résultat.

Q11. Déterminer la limite de $\mathbb{E}(U_n)$ lorsque n est fixé et $\ell \to +\infty$. Interprétez votre résultat.

Q12. On s'intéresse aux possibles partages de dates d'anniversaire dans un groupe de n personnes. On suppose que les années sont toutes de 365 jours et que les dates d'anniversaire sont uniformément réparties sur chaque jour de l'année. On fait aussi l'hypothèse que les dates d'anniversaire de n personnes choisies au hasard sont indépendantes mutuellement.

Soit D_n le nombre de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes choisies au hasard.

a/ Exprimer en fonction de n le nombre moyen de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes, c'est à dire $\mathbb{E}(D_n)$.

b/ Quelle est la limite de ce nombre moyen lorsque n tend vers $+\infty$.

CCINP 2020

Objectifs

L'objectif de la partie I est de montrer l'existence d'un développement ternaire propre pour certains nombres réels.

La partie II propose l'étude d'une série de fonctions où les coefficients du développement ternaire sont remplacés par une fonction continue.

La partie III étudie des développements ternaires aléatoires.

La partie IV définit et présente quelques propriétés de la fonction de Cantor-Lebesgue.

Notations

On note T l'ensemble des suites réelles $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{0;1;2\}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad t_n \in \{0;1;2\}$$

On désigne par ℓ^∞ l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ bornées et on pose $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n|$.

On note $\lfloor y \rfloor$ la partie entière d'un réel y.

PARTIE I - Développement ternaire

Étude de l'application σ

Q1. Démontrer que ℓ^∞ est un espace vectoriel réel et que l'application $u \mapsto \|u\|$ est une norme sur ℓ^∞.

Q2. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$, démontrer que la série de terme général $\frac{u_n}{3^n}$ est convergente.

On note alors :

$$\sigma(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n}$$

Q3. Démontrer que l'application σ est une forme linéaire continue sur ℓ^∞.

Q4. Démontrer que si $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in T$, alors le réel $\sigma(t)$ est dans l'intervalle $[0,1]$.

Q5. On note $\tau = (\tau_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\tau' = (\tau'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les éléments de T définis par :

$$\tau_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \tau_n = 0 \quad \tau'_1 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \tau_n = 2$$

Calculer $\sigma(\tau)$ et $\sigma(\tau')$. L'application σ est-elle injective sur T ?

Développement ternaire propre

On fixe $x \in [0,1[$. On définit une suite $t(x) = (t_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad t_n(x) = \lfloor 3^n x \rfloor - 3\lfloor 3^{n-1} x \rfloor.$$

Q6. Démontrer que $t(x) \in T$.

Q7. On définit deux suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n = \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} \quad \text{et} \quad y_n = x_n + \frac{1}{3^n}.$$

Démontrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes de limite x. En déduire que :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n(x)}{3^n}$$

Que peut-on en conclure concernant l'application $\left\{ \begin{array}{l} T \to [0,1] \\ u \mapsto \sigma(u) \end{array} \right.$?

La suite $t(x) = (t_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée développement ternaire propre de x.

PARTIE II - Étude d'une fonction définie par une série

Dans cette partie, on définit une fonction φ à l'aide d'un développement en série analogue au développement ternaire propre d'un réel, mais où la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est remplacée par une fonction numérique à valeurs dans l'intervalle $[0,2]$.

Pour tout réel x on pose :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\sin(nx)}{3^n}$$

Étude de l'application φ

Q8. Démontrer que φ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q9. Pour tout x réel, justifier l'écriture :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right)$$

et en déduire une expression simple de $\varphi(x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

Q10. Pour $x \in \mathbb{R}$, en déduire une expression simple de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n}$ en fonction de $\cos(x)$.

Q11. À l'aide de $\int_0^{\pi} \varphi(x)\mathrm{d}x$ démontrer que :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^{n+1}}\left((-1)^{n-1}+1\right)$$

puis en calculant la somme de la série du second membre, en déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}dx.$$

Q12. Retrouver cette valeur par un calcul direct.

PARTIE III - Développements ternaires aléatoires

Dans cette partie, $\left(T_{n,N}\right)_{n\geq 1, N\geq 2}$ est une suite de variables aléatoires discrètes réelles, mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et vérifiant :

$$\forall n \geq 1, \forall N \geq 2, T_{n,N}(\Omega) = \{0;1;2\}$$

avec $\mathbb{P}\left(T_{n,N}=0\right) = \mathbb{P}\left(T_{n,N}=1\right) = \frac{1}{N}$ et $\mathbb{P}\left(T_{n,N}=2\right) = 1-\frac{2}{N}$.

Soit $N \geq 2$ fixé. On pose :

$$X_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{T_{n,N}}{3^n}$$

On admet que X_N est une variable aléatoire discrète réelle définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Q13. Démontrer que X_N admet une espérance et une variance. Donner leur valeur en fonction de N.

Q14. Justifier que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Q15. Soit $\varepsilon > 0$, démontrer que :

$$\mathbb{P}\left(|X_N - 1| \geq \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|\mathbb{E}(X_N) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(|X_N - 1| \geq \varepsilon\right) = 0$$

PARTIE IV - Fonction de Cantor-Lebesgue

Dans cette partie, on va définir et étudier la fonction de Cantor-Lebesgue.

Étude d'une suite de fonctions

On note f_0 la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_0(x) = x$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(3x)}{2} & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[\\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{f_n(3x-2)}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}.$$

Q16. Représenter l'allure graphique des fonctions f_0, f_1 et f_2 sur trois schémas différents (pour f_2 on envisagera sept sous-intervalles de $[0,1]$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer que f_n est à valeurs dans $[0,1]$.

Q17. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, démontrer que :

$$\forall x \in [0,1], \quad \left|f_{n+1}(x) - f_n(x)\right| \leq \frac{1}{3\times 2^{n+1}}.$$

Q18. En déduire que la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

La limite de la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est notée f. On l'appelle fonction de Cantor-Lebesgue.

Q19. Démontrer que la fonction f est à valeurs dans [0,1] et qu'elle est croissante et continue sur $[0,1]$. Démontrer aussi qu'elle est surjective de $[0,1]$ vers $[0,1]$.

La fonction f est aussi nommée « escalier du diable ». Les développements ternaires étudiés en début de problème permettent d'obtenir une expression analytique de $f(x)$.