MP 2 - DS 05

le 22 janvier 2020

On s'intéresse dans ce problème à quelques résultats sur les séries trigonométriques. Une série trigonométrique est une série de fonctions $\sum u_n$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

Un premier exemple

On s'intéresse dans cette partie à la série trigonométrique de terme général $u_n : x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (avec $u_0 = 0$).

$\boxed{Q\,1}$ Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ à valeurs réelles. Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f(t)e^{ixt}\,dt = 0$.

$\boxed{Q\,2}$ On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$A_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx.$$

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2A_n(x)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)$.

$\boxed{Q\,3}$ Soit $x \in]0, 2\pi[$.

a. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_\pi^x A_n(t)\,dt = 0$.

b. Exprimer $\displaystyle\int_\pi^x A_n(t)\,dt$ en fonction de $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}$.

c. Montrer finalement que

$$\forall x \in]0, 2\pi[, \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}.$$

$\boxed{Q\,4}$

a. En déduire que la série de fonctions $\sum \dfrac{\sin nx}{n}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

b. On note, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n}$. Donner l'allure du graphe de f sur $[-2\pi, 4\pi]$.

c. La convergence de $\sum \dfrac{\sin nx}{n}$ est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Quelques généralités sur les séries trigonométriques

On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et de période 2π. Pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on note,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt, \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \beta_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt.$$

$\boxed{Q\,5}$ Démontrer que si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument, alors la série trigonométrique $\sum (a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{Q\,6}$ Une condition nécessaire :

a. Soient a, b deux réels. Démontrer que la maximum sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto |a\cos(x) + b\sin(x)|$ est $\sqrt{a^2+b^2}$.

b. On suppose que la série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Montrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument.

Q 7 Soit $k \in \mathbb{N}^*$

a. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\cos(nt)\,dt$

b. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kt)\,dt$, et pour $n \neq k$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\cos(nt)\,dt$.

Q 8 Soit f la somme d'une série trigonométrique $\sum(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)).$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\alpha_n(f) = a_n$. Exprimer $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0.

On admettra dans la suite du problème que $\beta_0(f) = 0$ et $\beta_n(f) = b_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Q 9 On admet que si h est une fonction de $\mathcal{C}_{2\pi}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0$ alors h est la fonction nulle.

a. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. On note, pour $x \in \mathbb{R}$, $u_0(x) = \dfrac{\alpha_0(f)}{2}$ et $u_n(x) = \alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et on note $g = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Quelle relation a-t-on entre $\alpha_n(g)$ et $\alpha_n(f)$? entre $\beta_n(g)$ et $\beta_n(f)$?

b. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = g(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx).$$

Q 10 On considère la fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ définie par $f(x) = x^2$ si $x \in [-\pi, \pi]$.

a. Représenter f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

b. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n(f) = 0$.

c. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n(f)$ et donner une série trigonométrique qui converge normalement et dont la somme est f.

d. En déduire la valeur des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

Étude de $\sum b_n \sin nx$

Dans la suite du problème on s'intéresse à des séries trigonométriques $\sum b_n\sin(nx)$. On notera, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$u_n(x) = b_n\sin(nx) \quad , \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k\sin(kx) \quad \text{et} \quad A_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\sin(kx).$$

On suppose de plus, dans toute la suite du problème que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est **décroissante et de limite nulle**.

Q 11 *Convergence simple :*

a. Soit $x \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $A_n(x)$ et vérifier que $|A_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sin(x/2)}$.

b. Soit $n \geqslant 2$. Montrer qu'on peut écrire, pour $x \in]0, 2\pi[$,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)\,(b_k - b_{k+1}) + \varepsilon_n(x),$$

avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n(x) = 0$.

c. En déduire que si $x \in \mathbb{R}$, la suite $(S_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge (ou que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$).

$\boxed{Q\ 12}$ *Une condition nécessaire pour la convergence uniforme sur* $\mathbb{R}$: on suppose que la série de fonctions $\sum b_n \sin(nx)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et on note S la limite de la suite (S_n).

a. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\left[S_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right)-S_n\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right]=0.$$

b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} nb_{2n}=0$. Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} nb_n=0$.

Étude de $\sum \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$

Dans cette partie, on a $u_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, $S_n(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}$.

$\boxed{Q\ 13}$

a. Justifier que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. La convergence de la série de fonctions est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$? On note alors, pour $x\in\mathbb{R}$, $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

b. Montrer que S est impaire et 2π-périodique.

$\boxed{Q\ 14}$

a. Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $t\mapsto \dfrac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt=\sqrt{\pi}$. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}\,dt.$$

$\boxed{Q\ 15}$ Soit $x\in]0,\pi[$.

a. Déterminer le tableau de variations de la fonction $t\mapsto \left|e^{\mathrm{i}x-t}-1\right|^2$ définie pour $t\in]0,+\infty[$. En déduire que, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $\left|e^{\mathrm{i}x-t}-1\right|\geqslant \sin x$.

b. Montrer que la fonction $t\mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}(1-e^{\mathrm{i}x-t})}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

$\boxed{Q\ 16}$ Soit $x\in]0,\pi[$.

a. Établir alors que : $S_n(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Im}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{i}x-t}-(e^{\mathrm{i}x-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-e^{\mathrm{i}x-t})}\,dt\right)$.

b. En déduire que : $S(x)=\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}(\mathrm{ch}\,t-\cos x)}$.

c. Montrer que, pour tout $x\in]0,\pi[$, $S(x)>0$.

$\boxed{Q\ 17}$

a. Soit $x\in]0,\pi[$. Établir que la fonction $h: u\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}(\mathrm{sh}^2 u+\sin^2 x)}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. On note alors
$$g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{du}{\sqrt{u}(\mathrm{sh}^2 u+\sin^2 x)}.$$

b. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $]0,\pi[$.

c. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi[$.

d. Montrer que, si $x \in]0,\pi[$, $S(2x) = \dfrac{\sin(2x)}{2\sqrt{2\pi}}\,g(x)$ et en déduire que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,2\pi[$.

$\boxed{Q\ 18}$ Étude au voisinage de 0. On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ et on note, pour $x \in]0,\pi]$,

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(\operatorname{ch} t - \cos x)} \quad \text{et} \quad J(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(\operatorname{ch} t - \cos x)}.$$

a. Montrer que J est bornée sur $]0,\pi]$.

b. Montrer que l'application $w : t \mapsto \dfrac{1 + \frac{t^2}{2} - \operatorname{ch} t}{\frac{t^2}{2}(\operatorname{ch} t - 1)}$, définie sur $]0,1]$, est prolongeable par continuité en 0.

c. En déduire que l'application $z : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}(\operatorname{ch} t - \cos x)} - \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}\left(1 + \frac{t^2}{2} - \cos x\right)}$ est bornée sur $]0,\pi]$.

d. Effectuer le changement de variable « $t = \sqrt{2(1-\cos x)}\,u^2$ » dans l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}\left(1 + \frac{t^2}{2} - \cos x\right)}$$

et en déduire un équivalent de $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}\left(1 + \frac{t^2}{2} - \cos x\right)}$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

e. Déduire de ces résultats, un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

Corrigé.

$\boxed{Q\,1}$ On peut intégrer par parties (les fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$). Cela donne

$$\int_a^b f(t)e^{ixt}\,dt = \left[\frac{f(t)e^{ixt}}{ix}\right]_a^b - \frac{1}{ix}\int_a^b f'(t)e^{ixt}\,dt = \frac{f(b)e^{ixb}-f(a)e^{ixa}}{ix} - \frac{1}{ix}\int_a^b f'(t)e^{ixt}\,dt.$$

On majore :

$$\left|\int_a^b f(t)e^{ixt}\,dt\right| \leqslant \frac{1}{x}\left(|f(a)|+|f(b)|+\int_a^b |f'(t)|\,dt\right).$$

Par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)e^{ixt}\,dt = 0$.

$\boxed{Q\,2}$ On utilise la relation

$$2\sin\frac{x}{2}\cos(kx) = \sin(\frac{1}{2}+k)x + \sin(\frac{1}{2}-k)x = \sin((k+\frac{1}{2})x) - \sin((k-\frac{1}{2})x).$$

Par télescopage,

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \sin((n+\frac{1}{2})x) - \sin\frac{x}{2},$$

puis $2\sin\frac{x}{2}A_n(x) = \sin((n+\frac{1}{2})x)$.

$\boxed{Q\,3}$

a. On a

$$\int_\pi^x A_n(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_\pi^x \left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\right)\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt.$$

On note $f(t) = \dfrac{1}{\sin\frac{t}{2}}$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\pi,x]$. On utilise le lemme de Lebesgue de la première question pour obtenir le résultat.

b. On a immédiatement

$$\int_\pi^x A_n(t)\,dt = \frac{x-\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin kt}{k}\right]_\pi^x = \frac{x-\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}.$$

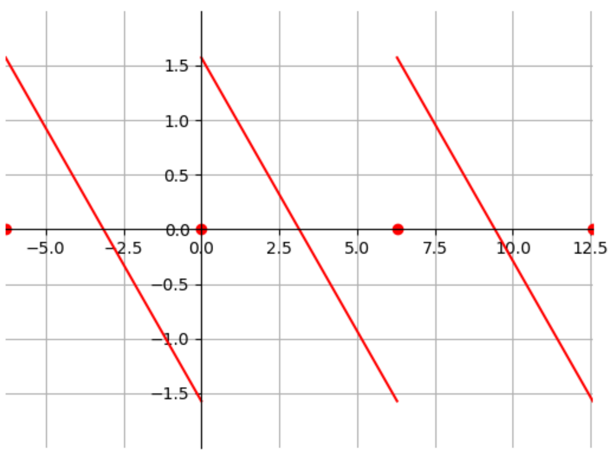
c. Pour $x\in]0,2\pi[$, lorsque n tend vers $+\infty$, les deux questions précédentes donnent

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi-x}{2}.$$

$\boxed{Q\,4}$

a. Chacune des fonctions est de période 2π. Il suffit donc d'étudier la série sur une période. On a déjà prouvé la convergence simple sur $]0,2\pi[$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n(0)=0$ et $\sum u_n(0)$ converge. La série de fonctions converge simplement sur $[0,2\pi[$ et donc sur $\mathbb{R}$ par périodicité (et la fonction somme est de période 2π).

b. On obtient :



c. On a une série de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Si la convergence sur $\mathbb{R}$ était uniforme, la fonction f serait continue sur $\mathbb{R}$, ce qui n'est pas le cas.

$\boxed{Q\,5}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leqslant |a_n| + |b_n|$. Puisque la série $\sum |a_n| + |b_n|$ converge, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{Q\,6}$

a. On réécrit l'expression : $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\alpha\cos x + \beta\sin x\right)$ avec $\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Puisque $\alpha^2+\beta^2 = 1$, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = \cos\varphi$ et $\beta = \sin\varphi$. On a alors

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$$

On en déduit que $|a\cos x + b\sin x| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$ avec égalité lorsque $x = \varphi$.

b. On a alors $\|u_n\|_\infty = \sqrt{a_n^2+b_n^2}$. Ce terme est par hypothèse le terme général d'une série convergente. Or $|a_n| \leqslant \sqrt{a_n^2+b_n^2}$ et $|b_n| \leqslant \sqrt{a_n^2+b_n^2}$. On en déduit que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont des séries absolument convergentes.

$\boxed{Q\,7}$

a. Si $k=0$, l'intégrale est directement nulle. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on linéarise : $\sin(kt)\cos(nt) = \frac{1}{2}(\sin((k+n)t) - \sin(k-n)t)$. Si $k = n$, il reste $\frac{1}{2}\sin(2nt)$ et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2nt)\,dt = \left[\frac{-\cos(2nt)}{2n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$. Si $n \neq k$, on a alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin((k+n)t) - \sin(k-n)t)\,dt = \left[-\frac{\cos((n+k)t)}{n+k} + \frac{\cos((k-n)t)}{k-n}\right)_{-\pi}^{\pi} = 0$$

par périodicité des cosinus (ou par calcul direct : $\cos(n+k)\pi = \cos(-(n+k)\pi) = (-1)^{n+k}$).

b. Pour $k = 0$, on obtient $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kt)\,dt = 2\pi$. Pour $k \neq 0$, on linéarise à nouveau : $\cos^2(kt) = \dfrac{1+\cos(2kt)}{2}$ et $\cos(kt)\cos(nt) = \frac{1}{2}(\cos(n+k)t - \cos(n-k)t)$. On calcule les intégrales comme au dessus et on trouve

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kt)\,dt = \pi \text{ si } k \neq 0 \text{ et } 2\pi \text{ si } k = 0, \text{ et pour } n \neq k, \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\cos(nt)\,dt = 0.$$

$\boxed{Q\,8}$ On a

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t)\cos(nt)\,dt.$$

La série $\sum u_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. On note $v_k(t) = u_k(t)\cos(nt)$. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|v_k(t)| \leqslant |u_k(t)| \leqslant \|u_k\|_\infty$. La série de fonctions continues $\sum v_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-\pi,\pi]$. On peut permuter somme et intégrale. Cela donne

$$\alpha_n(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt))\cos(nt))\,dt.$$

En utilisant les calculs précédents, tous les termes sont nuls sauf l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)\cos(nt)\,dt$ lorsque $k = n$. Il reste

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi}a_n.\pi = a_n.$$

Le calcul est légèrement différent pour $n = 0$ car $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(kt)\,dt = 2\pi$ si $k = 0$, au lieu de π. Cela donne alors

$$\alpha_0(f) = 2a_0 \text{ ou } a_0 = \frac{1}{2}\alpha_0(f).$$

$\boxed{Q\,9}$

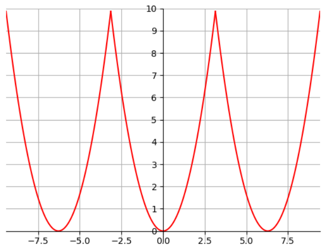
a. Par convergence normale, la fonction g est continue. Elle est également de période 2π donc dans $\mathcal{C}_{2\pi}$. La calcul précédent donne directement $\alpha_n(g) = \alpha_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et également pour $n = 0$. De même $\beta_n(g) = \beta_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Par linéarité de l'intégrale, si on pose $h = f - g$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0$ et $h \in \mathcal{C}_{2\pi}$. La fonction h est donc nulle, ce qui donne $f = g$, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx).$$

Q 10

a.



b. La fonction f est paire. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto f(t)\sin(nt)$ est paire également donc $\beta_n(f)$ est nul.

c. On a

$$\alpha_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \frac{1}{\pi}\frac{2\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\pi\alpha_n(f) &= \int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(nt)\,dt = \left[t^2\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\,dt \\
&= -\frac{2}{n}\left(\left[-t\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\,dt\right) \\
&= \frac{2}{n^2}\left(\pi(-1)^n + \pi(-1)^n\right) = (-1)^n\frac{4\pi}{n^2}.
\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n(f) = (-1)^n\frac{4}{n^2}$. La série $\sum \alpha_n(f)$ converge absolument donc la série de fonctions $\sum \alpha_n(f)\cos(nx)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et on peut appliquer les résultats précédents :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

d. On évalue en π. Cela donne

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

ce qui donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. De même en évaluant en 0, on obtient $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Q 11

a. On simplifie la somme $A_n(x)$ à l'aide d'une série géométrique, puisque $e^{ix} \neq 1$:

$$\begin{aligned}
A_n(x) &= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}}\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin\frac{x}{2}}\right) \\
&= \frac{\sin(\dfrac{nx}{2})\sin((\dfrac{n+1)x}{2})}{\sin\dfrac{x}{2}},
\end{aligned}$$

ce qui donne $|A_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}$.

b. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\sin(kx) = A_k(x) - A_{k-1}(x)$ avec $A_0(x) = 0$. On a alors

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(A_k(x) - A_{k-1}(x)) = \sum_{k=1}^{n} b_kA_k(x) - \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1}A_k(x) = \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1})A_k(x) + b_nA_n(x) - b_1A_0(x)$$

Cela donne $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)(b_k - b_{k+1}) + \varepsilon_n(x)$ avec $\varepsilon_n(x) = b_nA_n(x)$. On a enfin $|\varepsilon_n(x)| \leqslant \dfrac{b_n}{\sin(x/2)}$ de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$.

c. On commence pour $x \in]0, 2\pi[$. On a

$$|A_k(x)(b_k - b_{k+1})| \leqslant \frac{1}{\sin(x/2)}(b_k - b_{k+1})$$

car $b_k - b_{k+1} \geqslant 0$ (suite décroissante). Puisque la suite (b_n) converge, la série $\sum(b_k - b_{k+1})$ converge. Ainsi la série $\sum A_k(x)(b_k - b_{k+1})$ est absolument convergente. Puisque $\varepsilon_n(x)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on en déduit que $S_n(x)$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$. Pour $x = 0$, $S_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la limite existe également. Enfin S_n est de période 2π donc la convergence a lieue pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{Q\ 12}$

a. On a

$$\left|S_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right| \leqslant \|S_{2n} - S_n\|_\infty \leqslant \|S_{2n} - S\|_\infty + \|S - S_n\|_\infty.$$

Ce majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ ainsi

$$\lim_{n\to+\infty}\left[S_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right] = 0.$$

b. On écrit le terme

$$S_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{4n}\right) = \sum_{k=n+1}^{2n} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{4n}\right).$$

Si $k \in [\![n+1; 2n]\!]$ alors $\frac{k\pi}{4n} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ et $\sin\left(\frac{k\pi}{4n}\right) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. Alors

$$S_{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{4n}\right) = \sum_{k=n+1}^{2n} b_k \sin\frac{k\pi}{4n} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=n+1}^{2n} b_k \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} n b_{2n}.$$

Puisque b_{2n} est également positif, par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} n b_{2n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n b_{2n} = 0$. Si $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant (2n+1)b_{2n+1} \leqslant (2n+1)b_{2n} = \frac{2n+1}{n}(nb_{2n})$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1)b_{2n+1} = 0$. Finalement, puisque les suites extraites de rangs pairs et impairs convergent vers 0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} nb_n = 0$, c'est-à-dire que s'il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une telle série trigonométrique, alors $b_n = \underset{n\to+\infty}{o}(\frac{1}{n})$.

$\boxed{Q\ 13}$

a. Puisque la suite $(1/\sqrt{n})$ est décroissante vers 0, on peut appliquer les résultats précédent. La série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$. Si la convergence était uniforme sur $\mathbb{R}$ alors on aurait $n.\frac{1}{\sqrt{n}}$ de limite nulle, ce qui n'est pas le cas. Il n'y a donc pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est impaire et de période 2π : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S_n(-x) = -S_n(x)$ et $S_n(x+2\pi) = S_n(x)$. En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient que S est impaire et de période 2π.

$\boxed{Q\ 14}$

a. Soit $f : t \mapsto \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}$. Cette fonction est continue sur $]0, +\infty[$. On a $f(t) \underset{t\to0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$, donc f est intégrable sur $]0, 1]$, et $f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}(e^{-nt})$, donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$ (car $n > 0$). Finalement f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

b. L'application f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'appliction $u \mapsto u/n$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut donc effectuer le changement de variable associé, ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u/n}}\frac{du}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}.$$

$\boxed{Q\ 15}$

a. On note $\theta : t \mapsto \left|e^{\mathrm{i}x-t} - 1\right|^2$. On a

$$\psi(t) = (e^{-t}\cos(x) - 1)^2 + (e^{-t}\sin(x))^2 = e^{-2t} + 1 - 2e^{-t}\cos(x).$$

On a alors $\psi'(t) = -2e^{-2t} + 2e^{-t}\cos(x) = 2e^{-t}\left(\cos x - e^{-t}\right)$. Si $\cos x \leqslant 0$, alors la fonction ψ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Si $\cos x > 0$, alors $\theta'(t) > 0$ si et seulement si $\cos x > e^{-t}$, ou encore $t > -\ln(\cos x)$. Cela donne les variations suivantes :

- Si $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$:

t	0	$+\infty$
$\theta(t)$	$\|e^{\mathrm{i}x}-1\|^2 \searrow$	1

- si $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$:

t	0	$-\ln\cos x$	$+\infty$
$\theta(t)$	$\|e^{\mathrm{i}x}-1\|^2 \searrow$	$\sin^2 x$	$\nearrow 1$

Dans les 2 cas, on a bien, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|e^{\mathrm{i}x-t}-1\right|^2 \geqslant \sin^2 x$ d'où le résultat puisque $\sin x > 0$.

b. Puisque le dénominateur ne s'annule pas (d'après la question précédente), la fonction $h : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}(1-e^{\mathrm{i}x-t})}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On peut minorer $\left|e^{\mathrm{i}x-t}-1\right|$ par $\sin x$. On a donc $|h(t)| \leqslant \dfrac{1}{\sin x}\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, si bien que h est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q 16

a. On utilise le fait que $\dfrac{1}{\sqrt{k}} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-kt}}{\sqrt{t}}\,dt$, ce qui donne

$$u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Im}(e^{ikx})\int_0^{+\infty}\frac{e^{-kt}}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{k(\mathrm{i}x-t)}}{\sqrt{t}}\,dt\right).$$

Cela donne alors

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{k(\mathrm{i}x-t)}}{\sqrt{t}}\,dt\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{i}x-t}-(e^{\mathrm{i}x-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-e^{\mathrm{i}x-t})}\,dt\right). \end{aligned}$$

b. On utilise le théorème de convergence dominée. Soit

$$g_n(t) = \frac{e^{\mathrm{i}x-t}-(e^{\mathrm{i}x-t})^{n+1}}{\sqrt{t}(1-e^{\mathrm{i}x-t})} = e^{\mathrm{i}x-t}\frac{1-(e^{\mathrm{i}x-t})^n}{\sqrt{t}(1-e^{\mathrm{i}x-t})}$$

La suite (g_n) est une suite de fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après ce qui est fait avant). Si $t > 0$, alors $0 < e^{-t} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(e^{\mathrm{i}x-t})^n = 0$ (puisque $|(e^{\mathrm{i}x-t})^n| = e^{-nt}$). La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers la fonction $g : t \mapsto e^{\mathrm{i}x-t}\dfrac{1}{\sqrt{t}(1-e^{\mathrm{i}x-t})}$, fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour la domination, on remarque que $|1-(e^{\mathrm{i}x-t})^n| \leqslant 1+|e^{\mathrm{i}x-t})^n| \leqslant 2$, ce qui donne $|g_n(t)| \leqslant \dfrac{2e^{-t}}{\sqrt{t}|1-e^{\mathrm{i}x-t}|}$, intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (fait avant). On peut appliquer le théorème de convergence dominée, ce qui donne

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{i}x-t}}{\sqrt{t}(1-e^{\mathrm{i}x-t})}\,dt\right).$$

On détermine la partie imaginaire de la fonction :

$$\frac{e^{\mathrm{i}x-t}}{(1-e^{\mathrm{i}x-t})} = \frac{e^{\mathrm{i}x-t}(1-e^{-\mathrm{i}x-t})}{|1-e^{\mathrm{i}x-t}|^2} = \frac{e^{\mathrm{i}x-t}-e^{-2t}}{e^{-2t}+1-2e^{-t}\cos(x)}$$

d'où, une partie imaginaire égale à $\dfrac{(\sin x)e^{-t}}{e^{-2t}+1-2e^{-t}\cos(x)} = \dfrac{\sin x}{2\operatorname{ch} t - 2\cos t}$. On en déduit enfin que

$$f(x) = \frac{\sin x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}(\operatorname{ch} t - \cos x)}.$$

c. On intègre une fonction continue, intégrable, strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\sin x > 0$. Ainsi, pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.

Q 17

a. Soit h la fonction $h : u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}(\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 x)}$. Elle est continue sur $]0,+\infty[$, on a $h(u) \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{(\sin^2 x)\sqrt{u}}$, intégrable sur $]0,1]$, et $h(u) = \underset{u\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$. Ainsi h est intégrable sur $]0,+\infty[$.

b. On s'intéresse à la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} h(x,u)\,du$ où $h(x,u) = \dfrac{1}{\sqrt{u}(\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 x)}$. Pour tout $x \in]0,\pi[$, $u \mapsto h(x,u)$ est continue sur $]0,+\infty[$. Pour tout $u \in]0,+\infty[$, $x \mapsto h(x,u)$ est continue sur $]0,\pi[$. Soit $\alpha \in]0,\pi/2[$. Pour tout $x \in [\alpha, \pi-\alpha]$, on a

$$|h(x,u)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{u}(\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 \alpha)},$$

et ce majorant est intégrable sur $]0,+\infty[$. La fonction g est continue sur $[\alpha,\pi-\alpha]$, pour tout $\alpha \in]0,\pi/2[$, donc sur $]0,\pi[$.

c. Même principe, avec domination locale, en utilisant le théorème de dérivation...

d. On a

$$f(2x) = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(\mathrm{ch}\,t - \cos 2x)} = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(\mathrm{ch}\,t - 1 + 2\sin^2 x)}.$$

Comme $\mathrm{ch}\,(2a) = 1 + 2\mathrm{sh}^2 a$, cela donne

$$f(2x) = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(2\mathrm{sh}^2(t/2) + 2\sin^2 x)}.$$

Le changement linéaire « $t = 2u$ », donne

$$f(2x) = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2u}(\mathrm{sh}^2(u) + \sin^2 x)} = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u}(\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 x)}.$$

On a alors, pour tout $x \in]0,2\pi[$, $S(x) = \dfrac{\sin x}{2\sqrt{2\pi}} g(x/2)$. Par composition, puisque g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi[$, on en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,2\pi[$.

$\boxed{Q\,18}$

a. Si $x \in]0,\pi[$, on a, pour tout $t \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t}(\mathrm{ch}\,t - \cos x)} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t}(\mathrm{ch}\,t - 1)} = a(t)$. La fonction a est continue et intégrable sur $[1,+\infty[$ (même argument qu'avant) donc,

$$\forall x \in]0,\pi[, 0 \leqslant J(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(\mathrm{ch}\,t - 1)} = C.$$

b. On a directement la continuité sur $]0,1]$. On cherche la limite en 0. On a $\mathrm{ch}\,t = 1 + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{24} + \mathrm{o}(t^5)$ d'où

$$\frac{1 + \dfrac{t^2}{2} - \mathrm{ch}\,t}{\dfrac{t^2}{2}(\mathrm{ch}\,t - 1)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-t^4/24}{t^4/4} = -\frac{1}{6}.$$

La fonction se prolonge donc par continuité en 0.

c. Les intégrales existent (fonctions continues sont $]0,1]$ et en $\mathrm{O}(1/\sqrt{t})$ en 0). On regroupe

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}(\mathrm{ch}\,t - \cos x)} - \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}\left(1 + \dfrac{t^2}{2} - \cos x\right)} = \int_0^1 \frac{1 + t^2/2 - \mathrm{ch}\,t}{\sqrt{t}(\mathrm{ch}\,t - \cos x)\left(1 + \dfrac{t^2}{2} - \cos x\right)}\,dt$$

On majore la valeur absolue par

$$\int_0^1 \frac{\left|1 + t^2/2 - \mathrm{ch}\,t\right|}{\sqrt{t}(\mathrm{ch}\,t - 1)\left(1 + \dfrac{t^2}{2} - 1\right)}\,dt = \int_0^1 \frac{|w(t)|}{\sqrt{t}}\,dt.$$

La fonction w est continue sur $[0,1]$ donc bornée. Il existe M un majorant de $|w|$ sur $[0,1]$. Ainsi, pour tout $x \in]0,\pi]$, on a

$$|z(x)| \leqslant M \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = A.$$

d. L'application $u \mapsto \sqrt{2(1-\cos x)}\,u^2$ est $\mathscr{C}^1$ et bijective de $[0,1]$ sur $[0,\alpha]$ où $\alpha = (2(1-\cos x))^{1/4}$. On a alors

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}\left(1+\dfrac{t^2}{2}-\cos x\right)} = \int_0^\alpha \frac{2u\sqrt{2(1-\cos x)}}{(2(1-\cos x))^{1/4}.u.(1-\cos x)(1+u^4)}\,du = \frac{4}{(2(1-\cos x))^{3/4}}\int_0^\alpha \frac{du}{1+u^4}.$$

Puisque α tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 et $2(1-\cos x) \sim x^2$, on a

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}\left(1+\dfrac{t^2}{2}-\cos x\right)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\pi}{x^{3/2}\sqrt{2}}.$$

e. On combine le tout $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}(\operatorname{ch} t - \cos x)} + J(x)$. La seconde intégrale est bornée (par rapport à x) et la première est équivalente à $\dfrac{\pi}{x^{3/2}\sqrt{2}}$ lorsque x tend vers 0 (la différence est bornée et l'équivalent tend vers $+\infty$). On en déduit que

$$I(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2\pi}{x^{3/2}\sqrt{2}}.$$

Or $S(x) = \dfrac{\sin x}{2\sqrt{\pi}} I(x)$ donc $S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2\sqrt{\pi}}\dfrac{2\pi}{x^{3/2}\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$.