Opérateur de Volterra et équations différentielles

Opérateur de Volterra

1. Soit $f \in E$. Pour tout $x \in [0,\pi/2]$, on a $-V^*(f) = \int_{\pi/2}^{x} f(t)\mathrm{d}t$. Puisque f est continue sur $[0,\pi/2]$, $-V^*(f)$ est l'unique primitive de f qui s'annule en $\pi/2$. On a alors, en intégrant par partie ($V(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et g continue sur $[0,\pi/2]$) :

$$\langle V(f), g\rangle = \int_0^{\pi/2} V(f)(t)g(t)\mathrm{d}t = \left[-V(f)V^*(g)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} f(t)V^*(g)(t)\mathrm{d}t$$

Puisque $V^*(g)(\pi/2) = 0 = V(f)(0)$, on obtient

$$\langle V(f), g\rangle = \langle f, V^*(g)\rangle.$$

2. on a

- $\langle V^*\circ V(f), g\rangle = \langle V(f), V(g)\rangle = \langle f, V^*\circ V(g)\rangle$: l'endomorphisme est symétrique
- avec la relation précédente, $\langle V^*\circ V(f), f\rangle = \langle V(f), V(f)\rangle = \|V(f)\|^2 \geqslant 0$. Si ce terme est nul alors la fonction $V(f)$ est nulle. En dérivant, f est nulle. L'endomorphisme est symétrique défini positif.
- Soit λ une valeur propre de $V^*\circ V$ et $f \neq 0$ telle que $V^*\circ V(f) = \lambda f$. On a alors

$$\langle V^*\circ V(f), f\rangle = \lambda\|f\|^2 = \langle V(f), V(f)\rangle = \|V(f)\|^2.$$

Puisque f est non nulle, les deux normes sont strictement positives et $\lambda = \dfrac{\|V(f)\|^2}{\|f\|^2} > 0$. Les valeurs propres de $V^*\circ V$ sont strictement positives.

3. On a $V^*\circ V(f) = \lambda f$ soit, puisque $\lambda \neq 0$, $f = \frac{1}{\lambda}V^*(V(f))$. Puisque f est continue sur $[0,\pi/2]$, la primitive $V(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$ et de même toute primitive de $V(f)$ est alors de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,\pi/2]$. On en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,\pi/2]$. De nouveau en utilisant les remarques de la première question (sur les primitives), on a, sur $[0,\pi/2]$, $V^*\circ V(f) = \lambda f$. En dérivant, on a $-V(f) = \lambda f'$ et ensuite $-f = \lambda f''$. On en déduit que f est solution sur $[0,\pi/2]$ de $y'' + \frac{1}{\lambda}y = 0$. La fonction $V^*(V(f))$ s'annule en $\pi/2$ donc $\lambda f(\pi/2) = 0$ d'où $f(\pi/2) = 0$. La relation $-V(f) = \lambda f$ donne en 0, $f(0) = 0$. Finalement f est solution de

$$y'' + \frac{1}{\lambda}y = 0,$$

avec les conditions $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $y'(0) = 0$.

4.

- On cherche les solutions du système précédent. Puisque $\lambda > 0$, les solutions de l'équations différentielles sont les fonctions $x \mapsto A\cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + B\sin\left(\dfrac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$. La valeur de la dérivée en 0 donne $B = 0$. Il reste $x \mapsto A\cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$. La valeur en $\pi/2$ donne : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\frac{\pi/2}{\sqrt{\lambda}} = \frac{pi}{2} + k\pi \text{ ou encore } \sqrt{\lambda} = \frac{1}{2k+2},$$

c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda = \dfrac{1}{(2k+1)^2}$. Si $k = -p < 0$ alors $\dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{1}{(2p-1)^2}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. On peut donc se limiter à $\lambda = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

bilan analyse : si f est vecteur propre pour la valeur propre λ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ et il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [0,\pi/2]$, $f(x) = A\cos((2n+1)x)$.

- **Réciproque :** on peut vérifier que ces fonctions conviennent (c'est-à-dire que $V^*(Vf)) = \lambda f$) ou simplement remarquer que le système obtenu est équivalent à la relation $V^*(Vf)) = \lambda f$. En effet :

$$V^*(Vf)) = \lambda f \Leftrightarrow \begin{cases} 0 &= \lambda f(\pi/2) \\ -V(f) &= \lambda f' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 &= \lambda f(\pi/2) \\ 0 &= \lambda f'(0) \\ -f &= \lambda\lambda f'' \end{cases}$$

Synthèse : λ est valeur propre de V^*V si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$. On a alors $E_\lambda(f) = \mathrm{Vect}(f_n)$ où $f_n : x \mapsto \cos((2n+1)x)$.

Théorème d'approximation de Weierstrass

5. Calculs de $B_n(f)$

- On a directement $B_n(f) = (x+1-x)^n = 1$.
- On simplifie $\frac{k}{n}\binom{n}{k}$. Ce terme est nul lorsque $k = 0$. Pour k et $n \geqslant 1$, on a

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \frac{k}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Cela donne

$$\begin{aligned} B_n(f)(x) &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k+1}(1-x)^{n-1-k} = x(x+1-x)^{n-1} = x \end{aligned}$$

- On a, pour $n, k \geqslant 2$

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k} &= \frac{k(k-1)}{n^2}\binom{n}{k} + \frac{k}{n^2}\binom{n}{k} \\ &= \frac{n-1}{n}\frac{k(k-1)}{n(n-1)}\binom{n}{k} + \frac{1}{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k} \\ &= \frac{n-1}{n}\binom{n-2}{k-2} + \frac{1}{n}\binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

Pour $k=0$, le terme est nul. Pour $k=1$, il vaut $\frac{1}{n^2}\binom{n}{1} = \frac{1}{n}$. On en déduit

$$\begin{aligned} B_n(f)(x) &= \frac{n-1}{n}\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^k(1-x)^{n-k} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k} \\ &= \frac{n-1}{n}x^2(x+1-x)^{n-2} + \frac{1}{n}x(x+1-x)^{n-1} \\ &= \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{1}{n}x \end{aligned}$$

On peut retrouver ces résultats plus simplement en « dérivant » le terme en x^k. On pose $g(y) = (y+1-x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^k(1-x)^{n-k}$. En dérivant, on obtient $g'(1) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}ky^{k-1}(1-x)^{n-k}$, ce qui donne $\frac{x}{n}g'(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}$. Puisque $g'(x)=n$, on retrouve le résultat. En dérivant $yg'(y)$, on trouve de même la troisième somme.

6. On note $f_k : x \mapsto x^k$. On a

$$g_n(x) = B_n(f_2)(x) - 2xB_n(f_1)(x) + x^2B_n(f_0)(x) = \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{1}{n}x - 2x^2 + x^2 = \frac{1}{n}(x - x^2).$$

7. (a) Si $k \in I_n$, on a $(x - \frac{k}{n})^2 \geqslant \alpha^2$, d'où le résultat. On a alors, en notant $M = \|f\|_\infty$,

$$\begin{aligned} u_n &\leqslant 2M\sum_{k\in I_n}\binom{n}{k}1.x^k(1-x)^{n-k} \\ &\leqslant 2M\sum_{k\in I_n}\binom{n}{k}\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 x^k(1-x)^{n-k} \\ &\leqslant \frac{2M}{\alpha^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 x^k(1-x)^{n-k} \\ &\leqslant \frac{2M}{\alpha^2}g_n(x) \end{aligned}$$

(b) Puisque $g_n(x)$ est maximale en $1/2$, on obtient $u_n \leqslant \frac{M}{2\alpha^2 n}$.

8. On se fixe $\varepsilon > 0$. D'après la continuité uniforme de f, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (u,v) \in [0,1]^2, |u - v| < \alpha \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon.$$

On définit alors la valeur u_n précédente. On a alors

$$|f(x) - B_n(f)(x) \leqslant u_n + \sum_{k\in[\![0;n]\!]\setminus I_n}\binom{n}{k}\left|f(x) - f(\frac{k}{n})\right|x^k(1-x)^{n-k}$$

Si $k \in [\![0;n]\!]\setminus I_n$, alors $\left|x - \frac{k}{n}\right| < \alpha$ et ainsi $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \varepsilon$. On peut alors majorer :

$$\begin{aligned} \sum_{k\in[\![0;n]\!]\setminus I_n}\binom{n}{k}\left|f(x) - f(\frac{k}{n})\right|x^k(1-x)^{n-k} &\leqslant \sum_{k\in[\![0;n]\!]\setminus I_n}\binom{n}{k}\varepsilon x^k(1-x)^{n-k} \\ &\leqslant \varepsilon\sum_{k\in[\![0;n]\!]}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \varepsilon \end{aligned}$$

On en déduit alors que $|f(x) - B_n(f)(x)| \leqslant \varepsilon + \frac{M}{2\alpha^2 n}$. Le majorant tend vers ε en $+\infty$, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $|f(x) - B_n(f)(x)| \leqslant 2\varepsilon$. Cet indice n_0 ne dépend pas de x. Ainsi, pour $n \geqslant n_0$, on a $\|f - B_n(f)\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$.

Développement de $V^* \circ V(f)$ en série trigonométrique

9. Par linéarité, il suffit de prouver que $t \mapsto \cos^n t$ est dans F_n (ainsi tout polynôme de degré n en $\cos t$ sera dans F_n). Plusieurs façons pour le faire

- récurrence sur n : $\mathscr{P}(n)$: « $t \mapsto \cos^n t$ est dans F_n ». La propriété est vraie pour $n=0$ et $n=1$. Soit $n \in \mathbb{N}$ pour le quel la propriété est vraie au rang n. On a alors l'existence de $a_0, \dots, a_n$ dans $\mathbb{R}$ tels que, pour tout $t \in [0,\pi]$,

$$\cos^n t = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kt)$$

On a alors, pour tout $t \in [0,\pi]$,

$$\cos^{n+1}(t) = (\cos t)(\cos^n t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kt)\cos(t)$$

On a la relation $\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos a \cos b$, ce qui donne, pour tout $t \in [0,\pi]$,

$$\cos^{n+1}(t) = (\cos t)(\cos^n t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2}\big(\cos((k+1)t)+\cos((k-1)t)\big)$$

ce qui est bien une combinaison linéaire des fonctions $c_0, \dots, c_{n+1}$ (en utilisant, pour $k=0$, $\cos(-t)=\cos t$). Par récurrence, on a le résultat.

- Par les formules d'Euler :

$$\cos^n t = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{-ikt}e^{i(n-k)t} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{i(n-2k)t}$$

On regroupe les termes deux par deux (ceux d'indice k et $n-k$), en distingant suivant la parité de n (pour le terme central). Par exemple, si $n=2p$, on a

$$\begin{aligned}\cos^{2p}(t) &= \frac{1}{2^n}\left(\binom{2p}{p}+\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{k}\left(e^{i(n-2k)t}+e^{i(n-2(n-k))t}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2^n}\left(\binom{2p}{p}+2\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{k}\cos((n-2k)t)\right)\end{aligned}$$

10. On doit calculer $\|c_n\|_G$. On a

$$\|c_n\|_G^2 = \int_0^{\pi}\cos^2(nt)\mathrm{d}t$$

Si $n=0$, on trouve π, sinon on linéarise $\cos^2(nt) = \dfrac{1+\cos(2nt)}{2}$ et la norme vaut $\pi/2$. En posant $\alpha_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ et $\alpha_n = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ si $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(\alpha_k c_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est une base orthonormée de F_n. On monte $C_n = \alpha_n c_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. La famille $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée.

Il reste à prouver qu'elle est totale, c'est-à-dire que l'espace vectoriel engendré par ces fonctions est dense dans G pour la norme $\|\cdot\|_G$ (et pas pour la norme infinie). On note $F = \mathrm{Vect}(C_n, n \in \mathbb{Z})$. On se donne $f \in G$. On veut montrer que f est limite d'une suite d'éléments de F.

- on utilise la fonction $h = f \circ \arccos$ définie et continue sur $[-1,1]$. Ainsi, pour tout $t \in [0,\pi]$, $f(t) = h(\cos t)$.
- soit $\varepsilon > 0$. Il existe un polynôme P d'un certain degré d tel que $\|h-P\|_{\infty,[-1,1]} < \varepsilon$
- pour ce polynôme P de degré d, la fonction $g : t \mapsto P(\cos t)$ est une fonction de F_d d'après la question 8.
- pour tout $u \in [0,\pi]$, $f(t)-g(t) = h(\cos t) - P(\cos t)$ et $|(f-g)(t)| \leqslant \|h-P\|_{\infty,[0,1]} < \varepsilon$ ce qui donne
$$\|f-g\|_{\infty,[0,\pi]} < \varepsilon$$
- on a
$$\|f-g\|_G^2 = \int_0^{\pi}\big(f(u)-g(u)\big)^2\mathrm{d}u \leqslant \pi\,\|f-g\|_{\infty,[0,\pi]}^2$$

d'où $\|f-g\|_G < \sqrt{\pi}\varepsilon$ avec $g \in F_d$. On a bien montré la densité de F dans G et la famille est totale.

11. on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = \|f - p_{F_n}(f)\|_G$.

- On sait tout d'abord que $d_n = \inf\limits_{g \in F_n}\|f-g\|_G$. Puisque $F_n \subset F_{n+1}$, la suite (d_n) est décroissante.
- On se donne $\varepsilon > 0$. D'après la question précédente, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $h \in F_{n_0}$ telle que $\|f-h\|_G < \varepsilon$.
- d'après la définition de la borne inférieure, $d_{n_0} \leqslant \|f-h\|_G < \varepsilon$. Par décroissance, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $d_n < \varepsilon$

On a bien obtenu que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$.

D'une part, la fonction g est dans G (limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur $[0,\pi]$). En utilisant les propriétés des normes et la comparaison $\|\cdot\|_G \leqslant \sqrt{\pi}\,\|\cdot\|_\infty$, on a

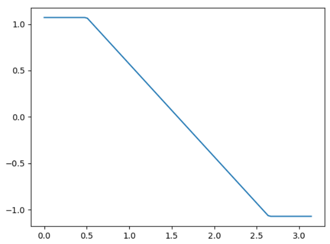
$$\|f-g\|_G \leqslant \|f - P_{F_n}(f)\|_G + \|P_{F_n}(f) - g\|_G \leqslant \|f - P_{F_n}(f)\|_G + \sqrt{\pi}\,\|P_{F_n}(f) - g\|_\infty$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $\|f-g\|_G$. Ainsi $f = g$.

Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on définit la fonction g_x sur $[0,\pi]$ par la formule :

$$g_x(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \max(x,t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ -g_x(\pi - t) & \text{si } \frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi \end{cases}$$

12. On commence par représenter la fonction g_x (c'est mieux si on veut voir ce qu'il se passe) :



Si on veut expliciter les valeurs de g_x :

$$g_x(t)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-x & \text{si } 0\leqslant t\leqslant x\\ \frac{\pi}{2}-t & \text{si } x\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}\\ -(\frac{\pi}{2}-(\pi-t))=\frac{\pi}{2}-t & \text{si } \frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant \pi-x\\ -(\frac{\pi}{2}-x) & \text{si } \pi-x\leqslant t\leqslant \pi\end{cases}$$

On remarque notamment que graphe présente une symétrie de centre $(\pi/2,0)$ - effectivement les points d'abcisses t et $\pi-t$ (de milieu $\pi/2$) ont des ordonnées opposées. On calcule alors $p_{F_n}(g_x)$ par la formule de projection dans une base orthonormée :

$$p_{F_n}(g_x)=\sum_{k=0}^{n}\langle g_x,C_k\rangle C_k=\frac{1}{\pi}\langle g_x,c_0\rangle+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\langle g_x,c_k\rangle c_k.$$

On a

$$\begin{aligned}\langle g_x,c_k\rangle &= \int_0^{\pi/2}g_x(t)\cos(kt)\mathrm{d}t+\int_{\pi/2}^{\pi}g_x(t)\cos(kt)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi/2}g_x(t)\cos(kt)\mathrm{d}t-\int_{\pi/2}^{\pi}g_x(\pi-t)\cos(kt)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

on effectue le changement affine « $u=\pi-t$ » dans la seconde intégrale ce qui donne

$$\begin{aligned}\langle g_x,c_k\rangle &= \int_0^{\pi/2}g_x(t)\cos(kt)\mathrm{d}t+\int_{\pi/2}^{0}g_x(u)\cos(k\pi-ku)\mathrm{d}u\\ &= \int_0^{\pi/2}g_x(t)\cos(kt)\mathrm{d}t-\int_0^{\pi/2}(-1)^k g_x(u)\cos(ku)\mathrm{d}u\\ &= (1-(-1)^k)\int_0^{\pi/2}g_x(t)\cos(kt)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On a déjà $\langle g_x,c_k\rangle=0$ lorsque k est pair. On s'intéresse au calcul de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}g_x(t)\cos(kt)\mathrm{d}t &= \int_0^{x}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(kt)\mathrm{d}t+\int_x^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos(kt)\mathrm{d}t\\ &= \left[\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^x+\left[\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\frac{\sin(kt)}{k}\right]_x^{\pi/2}+\int_x^{\pi/2}\frac{\sin(kt)}{k}\mathrm{d}t\\ &= \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{\sin(kx)}{k}-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{\sin(kx)}{k}-\left[\frac{\cos(kt)}{k^2}\right]_x^{\pi/2}\\ &= \frac{\cos(kx)}{k^2}-\frac{\cos(k\pi/2)}{k^2}\end{aligned}$$

Pour $k=2n+1$ impair, on obtient

$$\int_0^{\pi/2}g_x(t)\cos(kt)\mathrm{d}t=\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}.$$

Finalement, la coordonnée de $p_{F_n}(g_x)$ sur c_k est 0 si k est pair et $\frac{4}{\pi}\frac{\cos(kx)}{k^2}$ si k est impair.

On note $S_n=p_{F_n}(g_x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}c_{2n+1}$ et $u_n=\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}c_{2n+1}$. On a $\|u_n\|_{\infty,[0,\pi]}\leqslant\frac{4}{\pi(2n+1)^2}$ et la série de fonction $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0,\pi]$. On note $h=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$. D'après la question 10., on a $g_x=h$. Notamment, pour tout $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$,

$$g_x(t)=\frac{\pi}{2}-\max(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)t).$$

13. On réécrit séparement chaque terme.

- on a, pour $x\in[O,\frac{\pi}{2}]$,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\max(x,t)\right)f(t)\mathrm{d}t &= \int_0^{x}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)f(t)\mathrm{d}t+\int_x^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)f(t)\mathrm{d}t\\ &= \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t+\frac{\pi}{2}\int_x^{\frac{\pi}{2}}f(t)\mathrm{d}t-\int_x^{\frac{\pi}{2}}tf(t)\mathrm{d}t\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t-\int_x^{\frac{\pi}{2}}tf(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

- et, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}(V^*\circ V)(f)(x) &= \int_x^{\pi/2} V(f)(t)\,dt\\ &= [tV(f)(t)]_x^{\pi/2} - \int_x^{\pi/2} tf(t)\,dt\\ &= \frac{\pi}{2}V(f)(\frac{\pi}{2}) - xV(f)(x) - \int_x^{\pi/2} tf(t)\,dt\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} f(t)\mathrm{d}t - x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_x^{\frac{\pi}{2}} tf(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Cela donne l'égalité demandée. On a alors, avec la question précédente,

$$(V^*\circ V)(f)(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)t)f(t)\mathrm{d}t$$

On note $v_n(t) = \dfrac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)t)f(t)$. On a $\|v_n\|_{\infty,[0,\pi/2]} \leqslant \dfrac{1}{(2n+1)^2}\|f\|_{\infty,[0,\pi/2]}$ et la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement sur $[0,\pi/2]$. Cela permet de permuter somme et intégrale, ce qui donne, pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$,

$$(V^*\circ V)(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\int_0^{\pi/2} f(t)\cos((2n+1)t)\mathrm{d}t\right)\cos((2n+1)x)$$

En notant $a_n(f) = \dfrac{4}{\pi(2n+1)^2}\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(t)\cos((2n+1)t)\mathrm{d}t$, on a pour tous $f \in E$ et $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$:

$$V^*\circ V(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)\cos((2n+1)x).$$

Équations différentielles du type Sturm-Liouville

14. On se rappelle qu'on a étudié $V^*\circ V$ dans la partie A : il est symétrique et $(V^*\circ V)(\varphi_n) = \dfrac{1}{(2n+1)^2}\varphi_n$. Cela donne

$$\langle V^*\circ V(f),\varphi_n\rangle = \langle f, V^*\circ V(\varphi_n)\rangle = \frac{1}{(2n+1)^2}\langle f,\varphi_n\rangle$$

15. le plus sûr est de le faire par deux implications.

- sens direct : si g est solution alors $g''+\lambda g + h = 0$ avec les deux conditions. On applique l'endomorphisme $\theta = V^*\circ V$ à l'équation différentielle. On a $\theta(g'')+\lambda\theta(g)+\theta(h) = 0$. On s'intéresse à $\psi = \theta(g'')$. On a, en utilisant les deux valeurs pour g et g' :

  $$\psi(x) = \int_x^{\pi/2}\left(\int_0^t g''(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t = \int_x^{\pi/2}[g'(u)]_0^t\,\mathrm{d}t = \int_x^{\pi/2} g'(t)\mathrm{d}t = g(\pi/2)-g(x) = -g(x)$$

  cela donne $-g+\lambda\theta(g)+\theta(h) = 0$ ou encore $g = \lambda V^*\circ V(g) + V^*\circ V(h)$.
- Réciproquement, si on a cette relation, la fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ et on obtient en dérivant

  $$g' = -\lambda V(g) - V(h) \text{ puis } g'' = -\lambda g - h$$

  En évaluant la première relation en 0, on a $g'(0) = 0$. La relation de départ évaluée en $\pi/2$ donne $g(\pi/2) = 0$. On a bien le système (S).

On effectue alors le produit scalaire avec la fonction φ_n et on utilise la question précédente. On obtient

$$\langle g,\varphi_n\rangle = \frac{\lambda}{(2n+1)^2}\langle g,\varphi_n\rangle + \frac{1}{(2n+1)^2}\langle h,\varphi_n\rangle$$

ce qui donne, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\left(1-\frac{\lambda}{(2n+1)^2}\right)\langle g,\varphi_n\rangle = \frac{1}{(2n+1)^2}\langle h,\varphi_n\rangle$$

On reprend la question 12. On remarque que

$$a_n(f) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(2n+1)^2}\langle f,\varphi_n\rangle$$

et, pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$,

$$V^*\circ V(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\langle f,\varphi_n\rangle\varphi_n(x).$$

On a alors, pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$,

$$\begin{aligned}g(x) &= \lambda V^*\circ V(g)(x) + V^*\circ V(h)(x)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\left(\lambda\langle g,\varphi_n\rangle + \langle h,\varphi_n\rangle\right)\varphi_n(x)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\langle g,\varphi_n\rangle\varphi_n(x)\end{aligned}$$

en utilisant la relation précédente sur les produits scalaires.

16.

- D'après la question 14. si g est solution alors $g = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n$ avec
$$\langle g, \varphi_n \rangle = \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle.$$
c'est-à-dire que $g = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n$ et c'est la seule solution possible.
- Réciproquement, on étudie la somme de la série de fonctions $\sum w_n$ où $w_n = \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n$. On a
$$\|w_n\|_\infty \leqslant \frac{4}{\pi} \frac{1}{|(2n+1)^2 - \lambda|} \int_0^{\pi/2} |h(t)| \mathrm{d}t = \frac{C}{|(2n+1)^2 - \lambda|}$$
La série de fonctions continues w_n converge normalement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et on peut poser $g = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$. Il n'y a plus qu'à vérifier que g est solution... on justifie un peu moins... Puisque g est continue, on a
$$\begin{aligned} V^* \circ V(g)(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(g) \cos((2n+1)x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(g) \cos((2n+1)x) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n \end{aligned}$$
Par convergence normale (c'est là qu'il faudrait l'écrire mais c'est facile), on vérifie qu'on peut permuter somme et intégrale dans le calcul de $\langle g, \varphi_k \rangle$ et cela donne
$$\langle g, \varphi_k \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \langle \varphi_n, \varphi_k \rangle = \frac{1}{(2k+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_k \rangle$$
car $\langle \varphi_n, \varphi_k \rangle = \delta_{kn}$ et finalement
$$V^* \circ V(g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n(x)$$
On fait de même pour h et on obtient
$$V^* \circ V(h)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n(x)$$
alors
$$\begin{aligned} \lambda V^* \circ V(g) + V^* \circ V(h) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left(\frac{\lambda}{(2n+1)^2 - \lambda} + 1 \right) \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left(\frac{\lambda + (2n+1)^2 - \lambda}{(2n+1)^2 - \lambda} \right) \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n \\ &= g \end{aligned}$$

17.

- On commence par le cas $\left\langle h, \varphi_p \right\rangle \neq 0$. Si l'équation a une solution on doit avoir la relation entre $\left\langle g, \varphi_p \right\rangle$ et $\left\langle h, \varphi_p \right\rangle$ de la fin de la question 14. Cela donne $0 = \frac{1}{(2p+1)^2} \left\langle h, \varphi_p \right\rangle$ d'où une contradiction.
- Dans le cas où $\left\langle h, \varphi_p \right\rangle$, on n'a plus de valeur imposée pour $\left\langle g, \varphi_p \right\rangle$. On vérifie comme précédemment que
$$g = \sum_{n \in \mathbb{N}, n \neq p} \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n$$
est solution de (S). La fonction z est alors une solution de (S) si et seulement si $y = z - g$ vérifie $y'' + (2p+1)^2 y = 0$ avec $y(\pi/2) = 0$ et $y'(0) = 0$. Les multiples de φ_p sont les solutions de cette équation. Les solutions forment une droite affine passant par g est dirigée par φ_p.