Opérateur de Volterra et équations différentielles

L'objectif de ce problème est l'étude d'un opérateur de Volterra appliqué notamment à la résolution de certaines équations différentielles.

On considère l'espace vectoriel E des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, muni du produit scalaire défini pour tous f, g dans E par :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

On note $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ la norme associée à ce produit scalaire. Un endomorphisme V de E est dit *symétrique défini positif* si pour tous f, g dans E, on a :

$$\langle V(f), g\rangle = \langle f, V(g)\rangle \text{ et } \langle V(f), f\rangle > 0 \text{ pour tout } f \in E \text{ non nul.}$$

Remarques personnelles : même s'il n'en a pas l'air, le sujet est long - beaucoup de questions sont assez longues à traiter. Insistez - et assurez les questions plus calculatoires si les questions théoriques posent problème.

Opérateur de Volterra

On note V et V^* les endomorphismes de E définis par les formules :

$$\begin{aligned} V(f)(x) &= \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \\ V^*(f)(x) &= \int_x^{\pi/2} f(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

pour tous $f \in E$ et $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

1. En observant que $V(f)$ et $-V^*(f)$ sont des primitives de f, montrer que pour tous f, g dans E, on a :

$$\langle V(f), g\rangle = \langle f, V^*(g)\rangle.$$

2. Montrer que l'endomorphisme $V^* \circ V$ est symétrique défini positif. En déduire que ses valeurs propres sont strictement positives.

Soit λ une valeur propre de $V^* \circ V$ et f_λ un vecteur propre associé à λ.

3. Montrer que f_λ est de classe $\mathscr{C}^2$ et est solution de l'équation différentielle :

$$y'' + \frac{1}{\lambda}y = 0,$$

avec les conditions $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $y'(0) = 0$.

4. En déduire que λ est une valeur propre de $V^* \circ V$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\lambda = \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Préciser alors les vecteurs propres associés.

Théorème d'approximation de Weierstrass

Le but de cette partie est de prouver le théorème de Stone-Weierstrass : si f est une fonction continue sur $[0, 1]$ alors il existe une suite de polynômes P_n qui converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on associe à f le polynôme

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}.$$

5. Déterminer $B_n(f)$ lorsque

- $f : x \mapsto 1$.
- $f : x \mapsto x$.
- $f : x \mapsto x^2$.

6. Soit, pour $x \in [0,1]$,

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k},$$

Vérifier que $g_n(x) = \dfrac{x - x^2}{n}$.

7. Soit f continue sur $[0,1]$. Soit $\alpha > 0$. On fixe $x \in [0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$I_n = \{k \in [\![0;n]\!], \left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \alpha\}$$

et

$$u_n = \sum_{k \in I_n} \binom{n}{k} \left|f(x) - f(\frac{k}{n})\right| x^k (1-x)^{n-k}$$

(a) Montrer que si $k \in J_n$, on a

$$1 \leqslant \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2.$$

En déduire que $u_n \leqslant \dfrac{2\|f\|_\infty}{\alpha^2} g_n(x)$.

(b) Donner alors un majorant de u_n indépendant de x.

8. À l'aide du théorème de Heine, déduire des résultats précédents que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \|f - B_n(f)\|_\infty \leqslant 2\varepsilon.$$

On a donc établi le *théorème de Weierstrass* sur le segment $[0,1]$: toute fonction continue sur $[0,1]$ y est limite uniforme d'une suite de polynômes. On en déduit aisément, et on l'admet, le théorème d'approximation de Weierstrass sur un segment quelconque $[a,b]$.

Développement de $V^* \circ V(f)$ en série trigonométrique

On considère maintenant l'espace vectoriel G des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $[0,\pi]$, muni du produit scalaire défini pour tous $f, g \in G$ par :

$$\langle f, g\rangle_G = \int_0^\pi f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

On note : $\|f\|_G = \sqrt{\langle f, f\rangle_G}$ la norme associée à ce produit scalaire.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $c_n \in G$ par la formule $c_n(t) = \cos(nt)$ et on note $F_n = \mathrm{Vect}(c_0, \dots, c_n)$ le sous espace vectoriel de G engendré par $(c_0, \dots, c_n)$. On note également P_{F_n} la projection orthogonale de G sur F_n.

9. Montrer que si p est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto p(\cos(t))$ définie sur $[0,\pi]$ appartient à F_n.

10. Trouver une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs telle que la suite $(\alpha_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit orthonormée. Déduire du théorème d'approximation de Weierstrass que la suite orthonormée $(\alpha_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale.

Rappel et indication : une famille orthonormée $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans G lorsque l'espace vectoriel engendré est dense dans G. Si $f \in G$, on pourra utiliser la fonction $h = f \circ \arccos$ qui est continue sur $[-1,1]$ et avoir ainsi $f(t) = h(\cos t)$.

11. Soit $f \in G$. Montrer que $\|f - P_{F_n}(f)\|_G$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Si de plus la suite $(P_{F_n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,\pi]$ vers une fonction g, montrer que $g = f$.

Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on définit la fonction g_x sur $[0, \pi]$ par la formule :

$$g_x(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \max(x,t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ -g_x(\pi - t) & \text{si } \frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi \end{cases}$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les coordonnées de $P_{F_n}(g_x)$ sur la base $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ de F_n. En déduire que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\frac{\pi}{2} - \max(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)t).$$

13. Montrer que pour tous $f \in E$ et $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$V^* \circ V(f)(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \max(x,t)\right) f(t) \mathrm{d}t.$$

et en déduire la suite des coefficients $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ pour laquelle on a :

$$V^* \circ V(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) \cos((2n+1)x).$$

Équations différentielles du type Sturm-Liouville

Soit $h \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et l'équation différentielle (sur $[0, \frac{\pi}{2}]$) :

$$(S) \begin{cases} y'' + \lambda y + h = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ et } y'(0) = 0 \end{cases}$$

On définit $\varphi_n \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la formule : $\varphi_n(t) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \cos((2n+1)t)$.

14. Montrer que pour tout $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, $\langle V^* \circ V(f), \varphi_n \rangle = \dfrac{1}{(2n+1)^2} \langle f, \varphi_n \rangle$.

15. Montrer que g est solution de l'équation différentielle (S) si et seulement si

$$g = \lambda \cdot V^* \circ V(g) + V^* \circ V(h),$$

et que dans ce cas, on a les formules suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1 - \frac{\lambda}{(2n+1)^2}\right) \langle g, \varphi_n \rangle = \frac{1}{(2n+1)^2} \langle h, \varphi_n \rangle$$

et

$$g = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle g, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

16. On suppose dans cette question que λ n'est *pas* égale au carré d'un entier impair. Montrer que la série :

$$\sum \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

est normalement convergente. Exhiber alors une solution de S.

On suppose maintenant qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que : $\lambda = (2p+1)^2$.

17. Montrer que si $\left\langle h, \varphi_p \right\rangle = 0$ alors (S) a une infinité de solutions, puis exhiber l'une d'entre elles. Que peut-on dire si $\left\langle h, \varphi_p \right\rangle \neq 0$?