I Préliminaires

I. A - Projection sur un convexe fermé

Q1. On développe la norme via le produit scalaire (et on utilise sa symétrie) :

$$\|a+b\|^2 = \langle a+b, a+b\rangle = \langle a,a\rangle + \langle a,b\rangle + \langle b,a\rangle + \langle b,b\rangle = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2^s calab$$

On fait de même avec $\|a-b\|^2$. La somme donne $2\left(\|a\|^2+\|b\|^2\right)$. On obtient l'identité du parallélogramme : la somme des carrés des longueurs des diagonales et la somme des carrés des 4 côtés.

Q2. On applique l'égalité précédente avec $a = u - v$ et $b = u - v'$. On a $a + b = 2u - (v + v')$ et $a - b = v' - v$. Cela donne

$$4\left\|u - \frac{v+v'}{2}\right\|^2 + \left\|v'-v\right\|^2 = 4\|u-v\|^2 \text{ c'est-à-dire } \left\|u - \frac{v+v'}{2}\right\|^2 = \|u-v\|^2 - \left\|v'-v\right\|^2$$

Puisque $v' \neq v$, on a $\left\|u - \frac{v+v'}{2}\right\|^2 < \|u-v\|^2$ soit $\left\|u - \frac{v+v'}{2}\right\| < \|u-v\|$

Q3. On commence par se ramener à un compact. Soit $z \in F$ et $R = \|z-u\|$. On note $F_1 = F \cap \overline{B}(u,2R)$ et $F_2 = F\backslash F_1$. Pour tout $w \in F_2$, on a $\|u-w\| \geqslant 2R$. F_1 est fermé en tant qu'intersection de fermé et borné car contenu dans une boule. C'est donc un ensemble compact. L'application $w \mapsto \|u-w\|$ est continue sur E (elle est 1-lipschitzienne). Il existe donc $u \in F_1$ tel que $\|u-v\| = \min\{\|u-w\|, w \in F_1\}$. De plus $z \in F_1$ donc $\|u-v\| \leqslant \|u-z\| = R$. On a donc, pour tout $w \in F$, $\|u-v\| \leqslant \|u-w\|$ (vrai dans F_1 et dans F_2 donc dans $F = F_1 \cup F_2$).

Q4. On a l'existence d'un tel vecteur d'après la question précédente. Supposons qu'il y en ait deux $v \neq v'$. On a alors $\|u-v\| = \left\|u-v'\right\|$. Par convexité $\frac{u+u'}{2}$ est encore dans C et $\left\|u - \frac{v+v'}{2}\right\| < \|u-v\|$ ce qui contredit la minimalité de $\|u-v\|$ parmi les $\|u-w\|$ pour $w \in C$. On a donc l'unicité.

I. B - Inégalité de Hölder pour l'espérance

Q5. Si a ou b est nul alors l'inégalité est vraie. Sinon on a $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) = \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q)$. Puisque a^p et b^q sont dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ avec $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$ positifs, l'inégalité de concavité appliquée au logarithme donne

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q)$$

Par croissance de l'exponentielle, on obtient $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Q6. Toutes les espérances existent car les variables aléatoires sont finies.

- On suppose tout d'abord $\mathbb{E}(|X|^p) = \mathbb{E}\left(|Y|^q\right) = 1$. La démonstration la plus rapide consiste à comparer les fonctions : si $\omega \in \Omega$, alors $|(XY)(\omega)| \leqslant \frac{1}{p}|X(\omega)|^p + \frac{1}{q}|Y(\omega)|^q$. Cela donne, en terme de fonctions $|XY| \leqslant \frac{1}{p}|X|^p + \frac{1}{q}|Y|^q$. On peut alors utiliser la croissance de l'espérance :

$$\mathbb{E}(|XY|) \leqslant \frac{1}{p}\mathbb{E}\left(|X|^p\right) + \frac{1}{q}\mathbb{E}\left(|Y|^q\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

On peut également le redémontrer à partir des valeurs. On note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_r\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_s\}$. On a alors, par théorème de transfert appliqué au couple (X, Y) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|XY|) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} |x_i y_j| \mathbb{P}\left(X = x_i, Y = y_j\right) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \left(\frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_j|^q}{q}\right) \mathbb{P}\left(X = x_i, Y = y_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \frac{|x_i|^p}{p} \mathbb{P}\left(X = x_i, Y = y_j\right) + \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{r} \frac{|y_j|^q}{q} \mathbb{P}\left(X = x_i, Y = y_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \frac{|x_i|^p}{p} \left(\sum_{j=1}^{s} \mathbb{P}\left(X = x_i, Y = y_j\right)\right) + \sum_{j=1}^{s} \frac{|y_j|^q}{q} \left(\sum_{i=1}^{r} \mathbb{P}\left(X = x_i, Y = y_j\right)\right) \\
&= \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{r} |x_i|^p \mathbb{P}(X = x_i) + \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{s} |y_j|^q \mathbb{P}\left(Y = y_j\right) \\
&= \frac{1}{p}\mathbb{E}\left(|X|^p\right) + \frac{1}{q}\mathbb{E}\left(|Y|^q\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}$$

Ce qui donne $\mathbb{E}(|XY|) \leqslant 1$.

- Si $\mathbb{E}(|X|^p) = 0$ alors X est nulle ($|X|^p$ est finie et positive, d'espérance nulle donc nulle). De même pour Y. Dans l'un de ces cas on a bien l'inégalité.
- On se ramène au premier cas en posant $\tilde{X} = \dfrac{1}{\mathbb{E}\left(|X|^p\right)^{1/p}} X$ et $\tilde{Y} = \dfrac{1}{\mathbb{E}\left(|Y|^q\right)^{1/q}} X$. On a en effet $\mathbb{E}\left(|\tilde{X}|^p\right) = \dfrac{\mathbb{E}\left(|X|^p\right)}{\mathbb{E}\left(|X|^p\right)} = 1$ et de même pour $\tilde{Y}$. Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}\left(|\tilde{X}\tilde{Y}\right) = \frac{\mathbb{E}(|XY|)}{\mathbb{E}\left(|X|^p\right)^{1/p}\mathbb{E}\left(|Y|^q\right)^{1/q}} \leqslant 1$$

ce qui donne le résultat.

I. C - Espérance conditionnelle

Q7.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\left(\sum_{i=1}^{m}\mathbb{P}_{A_i}(X=x).\mathbb{P}(A_i)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{m}\mathbb{P}(A_i)\left(\sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}_{A_i}(X=x)\right) = \sum_{i=1}^{m}\mathbb{P}(A_i)\mathbb{E}(X\mid A_i)\end{aligned}$$

I. D - Variables aléatoires à queue sous-gaussienne

Q8. On utilise les notations préconisées. D'une part

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbb{P}\left(X^2 = y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbb{P}\left(X^2 = y_i\right)$$

D'autre part si $t\in\mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}(|X|\geqslant t) = \mathbb{P}\left(X^2\geqslant t^2\right) = \sum_{y_i\geqslant t^2} y_i$. Cette probabilité change à chaque fois que $t=\sqrt{y_i}$ et est constante sur $\left]\sqrt{y_i};\sqrt{y_{i+1}}\right]$ et vaut $\mathbb{P}\left(|X|\geqslant\sqrt{y_{i+1}}\right)$. De plus, elle est nulle lorsque $t>\sqrt{y_n}$. On a donc - on note $y_0=0$ pour simplifier l'écriture

$$\begin{aligned}2\int_0^{+\infty} t\mathbb{P}(|X|\geqslant t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{i=0}^{n-1} 2\int_{\sqrt{y_i}}^{\sqrt{y_{i+1}}} t\mathbb{P}(|X|\geqslant t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{P}\left(|X|\geqslant\sqrt{y_i}\right)\int_{\sqrt{y_i}}^{\sqrt{y_{i+1}}} 2t\mathrm{d}t\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{P}\left(X^2\geqslant y_{i+1}\right)(y_{i+1}-y_i) = \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{P}\left(X^2\geqslant y_{i+1}\right)y_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{P}\left(X^2\geqslant y_{i+1}\right)y_i\\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(X^2\geqslant y_i\right)y_i - \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{P}\left(X^2\geqslant y_{i+1}\right)y_i\\ &= \mathbb{P}\left(X^2\geqslant y_n\right)y_n + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\mathbb{P}\left(X^2\geqslant y_i\right)-\mathbb{P}\left(X^2\geqslant y_{i+1}\right)\right)y_i - y_0\mathbb{P}\left(|X|\geqslant y_1\right)\\ &= y_n\mathbb{P}\left(X^2=y_n\right) + \sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}\left(X^2=y_i\right)y_i = \mathbb{E}\left(X^2\right)\end{aligned}$$

car on a bien

$$\mathbb{P}\left(X^2\geqslant y_i\right) = \mathbb{P}\left(X^2=y_i\right)+\mathbb{P}\left(X^2\geqslant y_{i+1}\right) \text{ d'où } \mathbb{P}\left(X^2\geqslant y_i\right)-\mathbb{P}\left(X^2\geqslant y_{i+1}\right) = \mathbb{P}\left(X^2=y_i\right)$$

Q9. On utilise la relation précédente :

$$\mathbb{E}\left(X^2\right)\leqslant 2\int_0^{+\infty} ate^{-bt^2}\mathrm{d}t = \frac{a}{b}\int_0^{+\infty} 2bte^{-bt^2}\mathrm{d}t = \frac{a}{b}\left[e^{-bt^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{a}{b}.$$

Q10. soit $\omega\in(|X+\delta|\geqslant t)$: on a $t\leqslant|X(\omega)+\delta|\leqslant|X(\omega)|+|\delta|$ donc $|X(\omega)|\geqslant t-|\delta|$. On a l'inclusion des événements $(|X+\delta|\geqslant t)\subset(|X|\geqslant t-\delta|)$ donc l'inégalité sur les probabilités.

Q11. On regarde la différence :

$$a-\frac{1}{2}bt^2+b(t^2-2|\delta|t+\delta^2) = \frac{1}{2}bt^2-2b|\delta|t+b\delta^2+a = \frac{b}{2}\left((t-2|\delta|)^2-4\delta^2\right)+b\delta^2+a = \frac{b}{2}(t-2|\delta|)^2+(a-b\delta^2)$$

Puisque $\delta^2\leqslant\dfrac{a}{b}$ c'est-à-dire $a-b\delta^2\geqslant 0$, l'expression est bien positive donc

$$-b(t-|\delta|)^2\leqslant a-\frac{1}{2}bt^2.$$

Q12. On combine les questions - l'hypothèse $t \geqslant |\delta|$ permet d'avoir $t-|\delta| \geqslant 0$ et ainsi d'utiliser la majoration de $\mathbb{P}(|X| \geqslant t)$:

$$\mathbb{P}(|X+\delta| \geqslant t) \leqslant \mathbb{P}(|X| \leqslant t-|\delta|) \leqslant a\exp\left(-b(t-|\delta|)^2\right) \leqslant a\exp\left(a-\frac{1}{2}bt^2\right) = a\exp(a)\exp(-\frac{1}{2}bt^2)$$

Q13. si $0 \leqslant t \leqslant |\delta|$ alors $t^2 \leqslant \delta^2 \leqslant \frac{a}{b}$ et $-\frac{1}{2}bt^2 \geqslant -\frac{a}{2}$. On a donc $a\exp(a)\exp(-\frac{1}{2}bt^2) \geqslant a\exp(\frac{a}{2}) \geqslant a$. De l'autre côté on a $\mathbb{P}(|X+\delta| \geqslant t) \leqslant 1$. Il suffit de montrer que $a \geqslant 1$, ce qui est le cas car l'inégalité $\mathbb{P}(|X| \geqslant t) \leqslant a\exp(-bt^2)$ donne pour $t=0$, $\mathbb{P}(|X| \geqslant 0) \leqslant a$, soit $1 \leqslant a$.

II L'inégalité de concentration de Talagrand

II. A - Étude de deux cas particuliers

Q14. Si $X(\Omega) \cap C = \emptyset$ alors l'événement $X \in C$ est vide, sa probabilité est nulle : $\mathbb{P}(X \in C) = 0$ donc l'inégalité est vraie.

Q15. Puisque C rencontre $X(\Omega)$ en un seul point u, on a notamment u dans $X(\Omega)$. Il existe donc $(u_1, \ldots, u_n) \in \{-1,1\}^n$ tel que $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$. On a alors

$$\frac{1}{4}d(X,u)^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i - u_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4}((\varepsilon_i - u_i)^2.$$

On note Z_i la variable aléatoire $\frac{1}{4}((\varepsilon_i - u_i)^2$. Par indépendance des vad ε_i, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes. Lorsque ε_i prend la valeur u_i alors Z_i est nulle, lorsque $\varepsilon_i = -u_i$ alors Z_i vaut $\frac{1}{4}2^2 = 1$. Chaque situation a une probabilité $\frac{1}{2}$. Ainsi Z_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}d(X,u)^2$ suit une loi binomiale de paramètre n et $\frac{1}{2}$ (somme de n variables aléatoires indépendantes suivant $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$).

Q16. On utilise le théorème de transfert avec $Z = \frac{1}{4}d(X,u)^2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$:

$$\mathbb{E}\left(\exp(\frac{1}{2}Z)\right) = \sum_{k=0}^{n} e^{k/2}\binom{k}{n}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}^n\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}(e^{1/2})^k = \frac{1}{2^n}(1+\sqrt{e})^n = \left(\frac{1+\sqrt{e}}{2}\right)^n$$

Il suffit d'avoir $\frac{1+\sqrt{e}}{2} \leqslant 2$, soit $\sqrt{e} \leqslant 3$ ou encore $e \leqslant 9$... ça va, on a de la marge.

Q17. Puisque u est un point de C, on a, pour $\omega \in \Omega$, $d(X(\omega), C) \leqslant d(X,u)$ donc $d(X,C) \leqslant d(X,u)$. On a alors

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,u)^2\right)\right) \leqslant 2^n.$$

Puisque $(X \in C) = \{u\}$ et que $X(\Omega)$ contient 2^n points distincts (pour deux points de $X(\Omega)$, on a des expressions a coordonnées distinctes dans une base), on a $\mathbb{P}(X \in C) = \frac{1}{2^n}$ par équiprobabilité de chaque point. On a finalement

$$\mathbb{P}(X \in C) \cdot \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant \frac{2^n}{2^n} = 1.$$

II. B - Initialisation

Q18. On a une seule dimension et $X = \varepsilon_1 e_1$. On a $X(\Omega) = \{e_1, -e_1\}$ avec $\mathbb{P}(X = e_1) = \mathbb{P}(X = -e_1) = \frac{1}{2}$. L'événement $(X \in C)$ est l'événement certain de probabilité 1. La fonction $d(X,C)$ est nulle car chaque vecteur de $X(\Omega)$ (il y en a 2) est dans C. Ainsi $\exp(\frac{1}{8}d(X,C)^2)$ vaut toujours 1 et son espérance vaut 1. On a donc une égalité $1 \cdot 1 \leqslant 1$ qui est évidemment vraie.

II. C - Propriétés de C_{+1} et C_{-1}

Q19. On le fait pour $t = 1$: soit $z = x' + e_n \in C$ avec $x' \in E'$. On a également $z \in H_1$ par définition de H_1. On a de plus $x' = \pi(z)$ avec $z \in C \cap H_1$. Ainsi $x' \in \pi(C \cap H_1)$. Réciproquement, soit $x' \in C_1$. Ce vecteur est le projeté orthogonal sur E' d'une vecteur de $C \cap H_1$: $x' = \pi(y)$ avec $y \in C \cap H_1$. Ce vecteur y est dans H_1 donc il existe $y' \in E'$ tel que $y = y' + e_n$. On a alors $\pi(y) = y'$ par définition de la projection et ainsi $y' = \pi(y) = x'$. On a également $y \in C$. Finalement $y = x' + e_n \in C$ donc $x' + e_n \in C$.
On a bien montré que $x' \in C_1$ si et seulement si $x' + e_n \in C$. On fait de même avec $t = -1$.

Q20.
- d'après les notations $C \cap H_1$ et $C \cap H_{-1}$ sont non vides : il y a au moins 2 points dans $C \cap X(\Omega)$ avec la dernière coordonnée différentes, c'est-à-dire l'un avec une dernière coordonnée 1, l'autre -1 (sur e_n). Les projections C_1 et C_{-1} ont donc au moins un élément et sont non vides

- C et H_t sont convexes (C l'est et H_t est un espace vectoriel donc il est convexe. L'intersection est donc un convexe - et même un convexe non vide.
- soient $x, y \in C_t$ avec $x = \pi(x')$ et $y = \pi(y')$ avec $x', y' \in C \cap H_t$. Soit $\lambda \in [0,1]$. On a
$$\lambda x + (1-\lambda)y = \lambda\pi(x') + (1-\lambda)\pi(y') = \pi(\lambda x' + (1-\lambda)y')$$
et par convexité $\lambda x' + (1-\lambda)y' \in C \cap H_t$. Finalement $\lambda x + (1-\lambda)y \in C_t$ et C_t est bien un convexe non vide
- il reste à montrer que l'ensemble est fermé. On le fait pour C_1 (ce sera le même principe pour C_{-1}. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C_1 qui converge vers $y \in E'$. On a $x_k \in C_1$ équivalent à $y_k = x_k + e_n \in C$. On a donc une suite d'éléments de C qui converge. Puisque C est un convexe fermé, la limite est dans C et cette limite est également $y + e_n$. On a donc $y + e_n \in C$ et cela équivaut, puisque $y \in E'$ à $y \in C_1$.

Q21. Les événements $(\varepsilon_n = 1)$ et $(\varepsilon_n = -1)$ forment un système complet d'événements et chacun est de probabilité $1/2$. On a donc
$$\mathbb{P}(X \in C) = \mathbb{P}((X \in C) \cap (\varepsilon_n = 1)) + \mathbb{P}((X \in C) \cap (\varepsilon_n = -1))$$
On utilise à nouveau, si $x' \in E'$, $x' \in C_1$ si et seulement si $x' + e_n \in C$. Si ω vérifie $X(\omega) \in C$ et $\varepsilon_n(\omega) = 1$, alors on a $X(\omega) = x' + e_n$ avec $x' = \pi(X(\omega)) = X'(\omega)$ et $X(\omega) \in C$ si et seulement si $X'(\omega) \in C_1$. On a donc montré que
$$(X \in C) \cap (\varepsilon_n = 1) = (X' \in C_1) \cap (\varepsilon_n = 1)$$
Puisque X' ne dépend que des variables aléatoires $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$, le lemme des coalitions nous dit que les événements $(X' \in C_1)$ et $\varepsilon_n = 1$ sont indépendants. On a donc
$$\mathbb{P}((X \in C) \cap (\varepsilon_n = 1)) = \mathbb{P}\left((X' \in C_1) \cap (\varepsilon_n = 1)\right) = \mathbb{P}\left(X' \in C_1\right) \cdot \mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(X' \in C_1\right)$$
On a le même résultat (avec -1) pour l'autre terme, ce qui donne
$$\mathbb{P}(X \in C) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(X' \in C_1\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(X' \in C_{-1}\right).$$

II. D - Une inégalité cruciale

Q22. soit $\omega \in \Omega$. Si $\varepsilon_n(\omega) = 1$, alors $Y_{\varepsilon_n}(\omega) = Y_1(\omega)$ est le projeté de $X'(\omega)$ sur C_1 donc $X'(\omega) + 1.e_n \in C$, c'est-à-dire $(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n)(\omega) \in C$. Il en est de même si $\varepsilon_n(\omega) = -1$. Dans tous les cas $Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n \in C$. De la même manière $Y_{-\varepsilon_n} + (-\varepsilon_n)e_n$ est dans C. Par convexité, pour tout $\omega \in \Omega$, $\left((1-\lambda)\left(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n\right) + \lambda\left(Y_{-\varepsilon_n} + (-\varepsilon_n)e_n\right)\right)(\omega) \in C$. Par définition de la distance :
$$d(X(\omega), C) \leqslant \left\|\left((1-\lambda)\left(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n\right) + \lambda\left(Y_{-\varepsilon_n} + (-\varepsilon_n)e_n\right)\right)(\omega) - X(\omega)\right\|$$
pour tout $\omega \in \Omega$. On a donc
$$d(X, C) \leqslant \left\|\left((1-\lambda)\left(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n\right) + \lambda\left(Y_{-\varepsilon_n} + (-\varepsilon_n)e_n\right)\right) - X\right\|$$

Q23. On commence par récrire l'expression pour faire apparaître ce qu'on cherche - en écrivant que $X = X' + \varepsilon_n e_n$ et $X' = (1-\lambda)X' + \lambda X'$) :
$$\begin{aligned}\left((1-\lambda)\left(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n\right) + \lambda\left(Y_{-\varepsilon_n} + (-\varepsilon_n)e_n\right)\right) - X &= \left((1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\right) + (1-2\lambda)\varepsilon_n e_n - \varepsilon_n e_n \\ &= \left((1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\right) - 2\lambda\varepsilon_n e_n\end{aligned}$$
Le premier gros terme est dans E' et est donc orthogonal à e_n d'où, d'après le théorème de Pythagore,
$$\begin{aligned}\left\|(1-\lambda)\left(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n\right) + \lambda\left(Y_{-\varepsilon_n} + (-\varepsilon_n)e_n\right) - X\right\|^2 &= \left\|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\right\|^2 + 4\lambda^2\left\|\varepsilon_n e_n\right\|^2 \\ &= 4\lambda^2 + \left\|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\right\|^2\end{aligned}$$
Cela donne la première inégalité. Pour la second inégalité, on voit que cela revient à démontrer que l'application $u \mapsto \|u\|^2$ est convexe sur E. On fixe u et v deux vecteurs de E et on étudie
$$f(t) = \|(1-t)u + tv\|^2 - \left((1-t)\|u\|^2 + t\|v\|^2\right)$$
On a tout d'abord
$$f(t) = (1-t)^2\|u\|^2 + 2t(1-t)\langle u, v\rangle + t^2\|v\|^2 - (1-t)\|u\|^2 - t\|v\|^2 = (t^2-t)\|u\|^2 + 2t(1-t)\langle u, v\rangle + (t^2-t)\|v\|^2$$
ce qui donne
$$f(t) = (t^2-t)\left(\|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2\right) = t(t-1)\|u-v\|^2 \leqslant 0$$
Pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) \leqslant 0$ ce qui correspond bien à la convexité et la majoration qu'on cherche à obtenir.

II. E - Espérances conditionnelles

Q24. D'après les hypothèses il existe deux points dans $C \cap X(\Omega)$ sous la forme $x' \pm e_n$ avec $x' \in E'$ et même $x' \in C_t$ pour $t \in \{-1,1\}$. L'ensemble $(X' \in C_{-1})$ est donc non vide et $p_- \neq 0$ donc est strictement positive.

Q25. L'espérance conditionnelle est croissante (on a la linéarité et la positivité). On a donc

$$\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{\varepsilon_n})^2\right)\right)^{1-\lambda}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{-\varepsilon_n})^2\right)\right)^{\lambda}$$

et une égalité similaire avec les espérances conditionnelles. Comme c'est trop long à écrire, on note Z la fonction

$$(Y,\varepsilon) \mapsto Z(Y,\varepsilon) = \left(\exp\left(\frac{1}{8}d(Y,C_{\varepsilon})^2\right)\right)^{1-\lambda}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(Y,C_{-\varepsilon})^2\right)\right)^{\lambda}$$

On calcule donc

$$\mathbb{E}\big(Z(X',\varepsilon_n) \mid \varepsilon_n = -1\big) = \sum_{z \in Z(X',\varepsilon_n)(\Omega)} z\mathbb{P}_{\varepsilon_n=-1}\big(Z(X',\varepsilon_n) = z\big) = \sum_{z \in Z(X',\varepsilon_n)(\Omega)} z\mathbb{P}_{\varepsilon_n=-1}\big(Z(X',-1) = z\big) = \mathbb{E}\big(Z(X',-1) \mid \varepsilon_n = -1\big)$$

De plus X' dépend des variables aléatoires $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1}$ et $Z(X',-1)$ est donc indépendante de ε_n. Les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{\varepsilon_n=-1}\big(Z(X',-1) = z\big)$ sont finalement égales à $\mathbb{P}\big(Z(X',-1) = z\big)$ et $\mathbb{E}\big(Z(X',-1) \mid \varepsilon_n = -1\big) = \mathbb{E}\big(Z(X',-1)\big)$.
On a donc bien

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)|\varepsilon = -1\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\mathbb{E}\left(\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{-1})^2\right)\right)^{1-\lambda}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)\right)^{\lambda}\right)$$

Q26. Si on note $\tilde{X} = \left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{-1})^2\right)\right)^{1-\lambda}$ et $\tilde{Y} = \left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)\right)^{\lambda}$, on peut appliquer l'inégalité de Hölder (elles sont positives) :

$$\mathbb{E}\big(\tilde{X}\tilde{Y}\big) \leqslant \big(\mathbb{E}\big(X^p\big)\big)^{1/p}.\big(\mathbb{E}\big(Y^q\big)\big)^{1/q}$$

On choisit $\dfrac{1}{p} = 1-\lambda$ et $\dfrac{1}{q} = \lambda$. On a bien $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$ (et les termes sont positifs), ainsi que $\tilde{X}^p = \exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{-1})^2\right)$ et $\tilde{Y}^q = \exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)$. Cela donne la majoration demandée.

Q27. L'espace vectoriel E' est de dimension $n-1$, X' et C_{+1} ont toutes les hypothèses pour appliquer l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$. On a donc

$$\mathbb{P}\left(X' \in C_{+1}\right)\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)\right) \leqslant 1.$$

cela donne $\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)\right) \leqslant \dfrac{1}{p_+}$. La question **Q23** donne, avec $\lambda = 0$, $d(X,C)^2 \leqslant d(X',C_{\varepsilon})^2$ et ainsi

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)|\varepsilon_n = 1\right) \leqslant \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{\varepsilon_n})^2\right)|\varepsilon_n = 1\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)|\varepsilon_n = 1\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)\right)$$

de nouveau parce que X' est indépendante de ε_n. On obtient finalement

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)|\varepsilon_n = 1\right) \leqslant \frac{1}{p_+}.$$

Q28. On utilise tout ce qu'on a avec le système complet d'événements associé à ε_n et avec les relations obtenues par l'hypothèse de récurrence sur E',X',C_1 et E',X',C_{-1}

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) &= \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)|\varepsilon_n = 1\right)\mathbb{P}\left(\varepsilon_n = 1\right) + \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)|\varepsilon_n = -1\right)\mathbb{P}\left(\varepsilon_n = -1\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{p_+} + \frac{1}{2}\exp(\lambda^2/2)\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{-1})^2\right)\right)^{1-\lambda}\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)\right)^{\lambda} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_+} + \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{1}{(p_-)^{1-\lambda}}\frac{1}{(p_+)^{\lambda}}\right).\end{aligned}$$

II. F - Optimisation

Q29. Avec l'hypothèse $p_+ \geqslant p_-$, on a bien $\lambda \in [0,1]$. Il vient alors

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2p_+}\left(1+\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{(p_+)^{1-\lambda}}{(p_-)^{1-\lambda}}\frac{(p_+)^{\lambda}}{(p_+)^{\lambda}}\right) = \frac{1}{2p_+}\left(1+\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{1}{(p_-/p_+)^{1-\lambda}}\right) = \frac{1}{2p_+}\left(1+\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)(1-\lambda)^{\lambda-1}\right)$$

Q30. On note $h(x) = \ln(2+x) - \ln(2-x) - \dfrac{x^2}{2} - (x-1)\ln(1-x)$ pour $x \in [0,1[$. La fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son intervalle de définition et, pour tout $x \in [0,1[$,

$$h'(x) = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x} - x - \ln(1-x) - 1 = \frac{4}{4-x^2} - 1 - (\ln(1-x) + x) = \frac{x^2}{4-x^2} - (\ln(1-x)+x)$$

Pour $x < 1$, on a $\ln(1-x) \leqslant -x$ donc $\ln(1-x) + x \leqslant 0$. On a $\dfrac{x^2}{4-x^2} \geqslant 0$ et finalement h' est positive et h est croissante. Puisque $h(0) = 0$, la fonction est positive sur $[0,1[$ ce qui entraîne l'inégalité

Q31. Par croissance de l'exponentielle, on a, pour $x \in [0,1[$,

$$\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)(1-x)^{x-1} \leqslant \frac{2+x}{2-x} = \frac{4+x-2}{2-x} = \frac{4}{2-x} - 1$$

ce qui donne le résultat en ajoutant 1 de chaque côté.

Q32. On a donc

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2p_+}\frac{4}{2-\lambda} = \frac{1}{p_+}\frac{2}{1+\dfrac{p_-}{p_+}} = \frac{2}{p_+ + p_-}$$

Or $\mathbb{P}(X \in C) = \dfrac{1}{2}(p_+ + p_-)$ donc $\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{\mathbb{P}(X \in C)}$ ce qui donne

$$\mathbb{P}(X \in C).\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant 1$$

II. G - Inégalité de Talagrand

Q33. On doit relier une probabilité et une espérance... on pense à l'inégalité de Markov. On a $\mathbb{P}(d(X,C) \geqslant t) = \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right) \geqslant \exp\left(\frac{1}{8}t\right.\right.$ par croissance de $t \mapsto \exp(t^2/8)$. On a alors une variable aléatoire positive ce qui permet d'avoir

$$\mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right)}{e^{t^2/8}}$$

et ainsi

$$\mathbb{P}(X \in C)\cdot\mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant e^{-t^2/8}\mathbb{P}(X \in C)\,\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) = e^{-t^2/8}$$

III Démonstration du théorème de Johnson-Lindenstrauss

III. A - Une inégalité de concentration

Q34.

- L'application $M \mapsto M.u$ est linéaire et donc continue sur $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$. L'application norme est continue sur R^k et par composition g est continue sur $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$. Ainsi $C = g^{-1}([0,r])$ est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.
- On prouve la convexité. Soit M_1 et M_2 dans C : $\|M_1 \cdot u\| \leqslant r$ et $\|M_2 u\| \leqslant r$. Soit $\lambda \in [0,1]$, on a

$$\|(\lambda M_1 + (1-\lambda)M_2)\cdot u\| = \|\lambda M_1 \cdot u + (1-\lambda)M_2 \cdot u\| \leqslant \lambda\|M_1 \cdot u\| + (1-\lambda)\|M_2 \cdot u\| \leqslant (\lambda + 1 - \lambda)r = r$$

  ce qui garantit que $\lambda M_1 + (1-\lambda)M_2 \in C$.

Q35. On effectue le calcul (et on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz au bon endroit)

$$\|Mu\|^2 = \sum_{i=1}^n (Mu)_i^2 = \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n m_{ij}u_j\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n m_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^n u_j^2\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n m_{ij}^2$$

qui est exactement la norme euclidienne de M pour le produit scalaire matriciel donné.

Q36. On suppose que $d(M,C) < t$. Il existe donc $N \in C$ telle que $\|M-N\|_F < t$. On a alors

$$g(M) = \|M\cdot u\| = \|(M-N+N)\cdot u\| = \|(M-N)u + Nu\| \leqslant \|(M-N)u\| + \|Nu\| \leqslant \|M-N\|_F + \|Nu\| < t + r$$

Q37. En choisissant la base canonique de $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$, on peut identifier cet espace à R^{kd} est utiliser les résultats de la partie précédente. La question précédente donne $g(M) \geqslant r+t \Rightarrow d(M,C) \geqslant t$. Par conséquent $\mathbb{P}\left(g(X) \geqslant r+t\right) \leqslant \mathbb{P}(d(X,C) \geqslant t)$. Cela donne

$$\mathbb{P}(X \in C)\cdot\mathbb{P}\left(g(X) \leqslant r+t\right) \geqslant \mathbb{P}(X \in C)\cdot\mathbb{P}(d(X,C) \geqslant t) \leqslant e^{-t^2/8}$$

Or $\mathbb{P}(X \in X) = \mathbb{P}\left(g(X) \leqslant r\right)$. On a bien

$$\mathbb{P}\left(g(X) \leqslant r\right)\cdot\mathbb{P}\left(g(X) \geqslant r+t\right) \leqslant e^{-t^2/8}$$

III. B - Médianes

Q38. On note donc $G(t) = \mathbb{P}\left(g(X) \leqslant t\right)$. Cette fonction est croissante. La variable aléatoire X est finie donc $g(X)$ l'est également : il existe donc un ensemble de valeurs $v_1 < v_2 < \ldots < v_s$ telles que $g(X) = \{v_1, \ldots, v_s\}$. On a notamment $G(t) = 0$ si $t < v_1$ et $G(t) = 1$ si $t \geqslant v_s$ et plus généralement, $G(t) = \displaystyle\sum_{i \in [\![1;s]\!], v_i \leqslant t} \mathbb{P}\left(g(X) = v_i\right)$. On considère l'ensemble $G^{-1}([1/2;1]) = \{t \in \mathbb{R}, G(t) \geqslant \frac{1}{2}\}$. Cet ensemble contient au moins v_s. On note j le plus petit entier tel que $G(v_j) \geqslant \frac{1}{2}$.

- On a $G(v_j) \geqslant \frac{1}{2}$ et $G(v_j) = \mathbb{P}\left(g(X) \leqslant v_j\right)$.
- On a $G(v_{j-1}) = \mathbb{P}\left(g(X) \leqslant v_{j-1}\right) < \frac{1}{2}$ donc $\mathbb{P}\left(g(X) > v_{j-1}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(g(X) \leqslant v_{j-1}\right) \geqslant \frac{1}{2}$. Or d'après le choix des v_k, l'événement $(g(X) > v_{j-1})$ est l'événement $(g(X) \geqslant v_j)$.

On a par conséquent $\mathbb{P}\left(g(X) \leqslant v_j\right) \geqslant \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}\left(g(X) \geqslant v_j\right) \geqslant \frac{1}{2}$. La valeur v_j est une médiane de $g(X)$.

Q39. On a $\left(|g(X) - m| \geqslant t\right) = \left(g(X) \geqslant m + t\right) \uplus \left(g(X) \leqslant m - t\right)$. En appliquant la question **Q37**, on a

$$\mathbb{P}\left(g(X) \leqslant m\right)\mathbb{P}\left(g(X) \geqslant m + t\right) \leqslant \exp(-t^2/8) \text{ et } \mathbb{P}\left(g(X) \leqslant m - t\right)\mathbb{P}\left(g(X) \geqslant m - t + t\right) \leqslant \exp(-t^2/8)$$

LA première inégalité avec $\mathbb{P}\left(g(X) \geqslant m\right) \geqslant \frac{1}{2}$ donne $\mathbb{P}\left(g(X) \geqslant m + t\right) \leqslant 2e^{-t^2/8}$ et la seconde avec $\mathbb{P}\left(g(X) \geqslant m\right) \geqslant \frac{1}{2}$ donne $\mathbb{P}\left(g(X) \leqslant m - t\right) \leqslant 2e^{-t^2/8}$. En sommant les probabilités des deux événements disjoints, on obtient

$$\mathbb{P}\left(|g(X) - m| \geqslant t\right) \leqslant \mathbb{P}\left(g(X) \geqslant m + t\right) + \mathbb{P}\left(g(X) \leqslant m - t\right) \leqslant 4e^{-t^2/8}$$

Q40. On reprend la relation de **Q8** :

$$\mathbb{E}\left((g(X) - m)^2\right) = 2\int_0^{+\infty} t\mathbb{P}\left(|g(X) - m| \geqslant t\right)\mathrm{d}t \leqslant 8\int_0^{+\infty} te^{-t^2/8}\mathrm{d}t = 32\int_0^{+\infty} \frac{t}{4}e^{-t^2/8}\mathrm{d}t = 32\left[-e^{-t^2/8}\right]_0^{+\infty} = 32$$

Q41. On a $X = \displaystyle\sum_{(i,j) \in [\![1;k]\!] \times [\![1;d]\!]} \varepsilon_{ij} E_{ij}$ où les matrices E_{ij} sont les matrices élémentaires de la base canonique de $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$. On a alors

$$g(X)^2 = \|X \cdot u\|^2 = \sum_{i=1}^{k} (X \cdot u)_i^2 = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{d} u_j \varepsilon_{ij}\right)^2$$

On note $Y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} u_j \varepsilon_{ij}$. Les variables aléatoires ε_{ij} sont centrées donc $\mathbb{E}(Y_i) = 0$ et ainsi $\mathbb{E}\left(Y_i^2\right) = V(Y_i)$. Par propriété de la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes, on a $V(Y_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} u_j^2 V(\varepsilon_{ij})$. On vérifie que $V(\varepsilon_{ij}) = \mathbb{E}\left(\varepsilon_{ij}^2\right) = \mathbb{E}(1) = 1$ donc $V(Y_i) = \mathbb{E}\left(Y_i^2\right) = \|u\|^2 = 1$. On en déduit finalement que $\mathbb{E}\left(g(X)^2\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left(Y_i^2\right) = k$.

Par inégalité de Cauchy-Schwarz, $\mathbb{E}\left(1.g(X)\right) \leqslant \sqrt{\mathbb{E}\left(1^2\right)}\sqrt{\mathbb{E}\left(g(X)^2\right)} = \sqrt{k}$.

Q42. On a $\mathbb{E}\left((g(X) - m)^2\right) = \mathbb{E}\left(g(X)^2 - 2mg(X) + m^2\right) = k - 2m\mathbb{E}\left(g(X)\right) + m^2 \geqslant k - 2m\sqrt{k} + m^2 = (\sqrt{k} - m)^2$ (on a bien $m \geqslant 0$ puisque $g(X)$ est à valeurs positives).

III. C - Un lemme-clé

Q43. L'inégalité de **Q39** montre le caractère sous-gaussien de $|g(X) - m|$ avec des constantes $a = 4$ et $b = \frac{1}{8}$, de sorte que $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{32}$. Avec **Q40** et **Q42** , on a en particulier $(\sqrt{k} - m)^2 \leqslant 32$. Avec $\delta = m - \sqrt{k}$, la condition énoncée en **Q9** est donc vérifiée, et il vient bien avec **Q12** et **Q13** pour tout $t > 0$

$$P(|g(X) - m + \delta| \geqslant t) = P(|g(X) - \sqrt{k}| \geqslant t) \leqslant 4e^4 e^{-\frac{t^2}{16}}.$$

Q44. On a directement avec la question précédente pour $t = \varepsilon\sqrt{k}$

$$\mathbb{P}\left(|g(X) - \sqrt{k}| \geqslant \varepsilon\sqrt{k}\right) = \mathbb{P}\left(|\|A_k u\| - 1| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 4e^4 e^{-\frac{k\varepsilon^2}{16}}.$$

Or, $\frac{k\varepsilon^2}{16} \geqslant 10\ln(1/\delta)$ d'où

$$\mathbb{P}\left(|\|A_k u\| - 1| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 4e^4 e^{10\ln(\delta)} = 4e^4\delta^{10}.$$

Or $e < 3$ et $\delta < \frac{1}{2}$ donc $4e^4\delta^9 \leqslant \frac{4 \times 81}{2^9} = \frac{81}{128} < 1$ d'où finalement

$$\mathbb{P}\left(|\|A_k u\| - 1| > \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|\|A_k u\| - 1| \geqslant \varepsilon\right) < \delta.$$

III. D - Conclusion

Q45. On a $\overline{E_{i,j}} = \{|\|A_k u\| - 1| > \varepsilon\}$ et en appliquant le résultat de la question précédente à $u = \frac{v_i - v_j}{\|v_i - v_j\|}$ qui est bien unitaire, on a directement

$$\mathbb{P}\left(\overline{E_{i,j}}\right) < \delta$$

Q46. Il vient par sous-additivité

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant N} E_{i,j}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant N} \overline{E_{i,j}}\right) \geqslant 1 - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} \mathbb{P}\left(\overline{E_{i,j}}\right) \geqslant 1 - \delta \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} 1 = 1 - \frac{N(N-1)}{2}\delta$$

comme demandé.

Q47. On choisit $\delta > 0$ tel que $\frac{N(N-1)}{2}\delta < 1 \iff \delta < \frac{2}{N(N-1)}$, par exemple $\delta = \frac{1}{N^2}$. On constate alors que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant N} E_{i,j}\right) > 0$$

de sorte qu'il existe en particulier des valeurs de la variable aléatoire X telles que tous les événements $\left(E_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant N\\ 1\leqslant j\leqslant N}}$ soient simultanément réalisés (on notera que par symétrie des rôles, $E_{i,j} = E_{j,i}$), ce qui revient à dire que pour une telle valeur de X, A_k est canoniquement associée à une ε-isométrie f pour $(v_1, \ldots, v_N)$, et donc en particulier qu'un tel objet existe. Ce choix impose

$$k \geqslant 160\frac{\ln\left(N^2\right)}{\varepsilon^2} = 320\frac{\ln(N)}{\varepsilon^2}$$

On constate donc que la constante $c = 320$ convient, ce qui démontre le théorème de Johnson et Lindenstrauss.