## A. Préliminaires

1. On a $1+j^2+j^4 = \dfrac{1-j^6}{1-j^2} = 0$ (car $j^2 \neq 1$).

2. On a plusieurs méthodes possibles :
   - déterminer le polynôme caractéristique, chercher ses racines et chercher les espaces propres associés.
   - la forme de la matrice (son nombre important de 0) permet d'envisager une résolution directe de l'équation $AX = \lambda X$ : si on note $X$ le vecteur colonne ${}^t(x,y,z,t)$, alors

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& \lambda x \\ z &=& \lambda y \\ t &=& \lambda t \\ -x-z &=& \lambda t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& \lambda x \\ z &=& \lambda^2 x \\ t &=& \lambda^3 x \\ (\lambda^4+\lambda^2+1)x &=& 0 \end{array}\right.$$

   Si $\lambda$ n'est pas racine de $X^4+X^2+1$ alors la seule solution est le vecteur nul. Si $\lambda$ est racine alors on a un espace de dimension 1 de solutions, dirigé par le vecteur ${}^t(1,\lambda,\lambda^2,\lambda^3)$.

   On cherche les racines $X^4+X^2+1$ : on a déjà vu que $j$ convenait, par parité $-j$ convient. On remarque que $j^2$ et $-j^2$ également. Ce sont quatre complexes différents (on peut aussi noter $\omega = e^{i\pi/3}$ et remarquer que ces quatre complexes sont $\omega, \omega^2, \omega^4$ et $\omega^5$) - ou encore remarquer que ces complexes sont $j, -j, \overline{j}, \overline{j^2}$). Avec

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ j & -j & j^2 & -j^2 \\ j^2 & j^2 & j & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j^2 \end{pmatrix}$$

   on a $U^{-1}AU = D$.

3. En notant $V_k$ la $k$-ième colonne de $U$ et $\lambda_k$ les éléments diagonaux de $A$ (on a $AV_k = \lambda_k V_k$), on sait, puisque $A$ est diagonalisable que les solutions sont exactement les fonctions

$$X : t \mapsto \sum_{k=1}^{4} a_k e^{\lambda_k t} V_k$$

   où les $a_k$ sont des complexes quelconques.

4. La fonction $y$ vérifie (2) si et seulement si on a $Y' = AY$. On obtient alors

$$y(t) = \sum_{k=1}^{4} a_k e^{\lambda_k t} = a_1 e^{jt} + a_2 e^{-jt} + a_3 e^{j^2 t} + a_4 e^{-j^2 t}$$

   Les parties réelles et imaginaires des fonctions $t \mapsto e^{\lambda_k t}$ sont des solutions à valeurs réelles (ou on peut récrire $e^{jt} = \exp((\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})t) = e^{\frac{t}{2}}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + i \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)$ et de même pour les autres). Cela donne quatre fonctions

$$t \mapsto e^{\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), t \mapsto e^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),$$

   qui forment un système générateur des solutions et donc un système fondamental de solutions (car l'espace des solutions est de dimension 4).

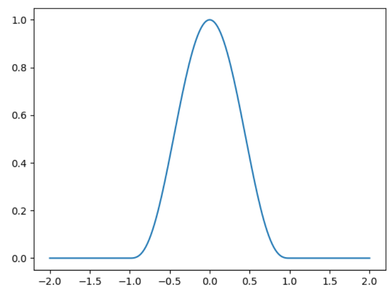
## B. Un lemme de du Bois-Reymond

5. la fonction $h$ est de classe $\mathscr{C}^2$ (et même $\mathscr{C}^\infty$) sur $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$. Puisque 1 est racine de multiplicité 3 de $(1-X^2)^3$ alors les limites de $h, h'$ et $h''$ en 1 à gauche sont nulles donc égales à celles en 1 à droite. De même en $-1$ et finalement $h$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Pour la dérivée d'ordre 3, on peut écrite $h(t) = (1-t)^3(1+t)^3$ et utiliser la formule de Leibniz pour dériver 3 fois puis prendre la valeur en 1. Cela donne $\lim\limits_{t\to 1^-} h^{(3)}(t) = 3!(1+1)^3 = 48$ (et $\lim\limits_{t\to -1^+} h^{(3)}(t) = -48$) donc différente de la limite à droite. La fonction n'est pas de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(t):
    return np.where(t**2<=1, (1-t**2)**3 ,0)

X = np.linspace(-2,2,201)
Y = f(X)
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```



**6.** On construit une fonction affine qui envoie le segment $[x_0, x_1]$ sur $[-1,1]$ :

$$\theta : x \mapsto -1 + 2\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{2x-x_0-x_1}{x_1-x_0}$$

elle vérifie bien $\theta(x_0) = -1$, $\theta(x_1) = 1$ (et $\theta([x_0,x_1]) = [-1,1]$). On note alors $g(x) = h(\theta(x))$. la fonction $g$ correspond à ce que l'on souhaite.

On aurait également pu prendre une fonction $g$ nulle en dehors de $[x_0, x_1]$ avec $g(x) = ((x-x_0)(x_1-x))^3$ pour $x \in [x_0,x_1]$ (c'est la même à un coefficient multiplicatif près).

**7.** Supposons que $F$ est non nulle sur $]0,1[$ : il existe $a \in ]0,1[$ tel que $F(a) \neq 0$. On traite le cas où $F(a) > 0$ (sinon on remplace $F$ par $-F$). Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in [a-\alpha, a+\alpha]$, $F(x) \geqslant \frac{1}{2}F(a)$ - on prend $\alpha$ suffisamment petit pour que $[a-\alpha, a+\alpha] \subset [0,1]$. On note $x_0 = a-\alpha$ et $x_1 = a+\alpha$ et $g$ la fonction de la question précédente avec ces valeurs. La fonction $g$ est bien dans $E^2_{0,0}$. On a alors

$$\int_0^1 F(t)g(t)\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_1} F(t)g(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}F(a)\int_{x_0}^{x_1} g(t)\mathrm{d}t > 0$$

puisque $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} g(t)\mathrm{d}t > 0$ (et $F(a) > 0$). On a une contradiction donc $F$ est nulle sur $]0,1[$ et donc sur $[0,1]$ par continuité.

## C. Une condition nécessaire d'Euler-Lagrange

**8.** On peut évidemment prendre des polynômes sous forme quelconque $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \beta_k X^k$ et tout développer. C'est plus judicieux d'utiliser la formule de Taylor pour obtenir plus facilement les termes en chaque degré : supposons que $n$ soit le degré maximal de $P$ et $Q$ :

$$\forall x \in [0,1], P((f_0+tu)(x)) = P(f_0(x)+tu(x)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(f_0(x))}{k!} u^k(x) t^k$$

et ainsi

$$q(t) = \sum_{k=0}^{n} \left( \int_0^1 \left( \frac{P^{(k)}(f_0(x))}{k!} u^k(x) + \frac{Q^{(k)}(f_0'(x))}{k!} u'^k(x) \right) \mathrm{d}x \right) t^k$$

ce qui est bien une expression polynomiale en $t$. On a notamment un coefficient de degré 1

$$a_1 = \int_0^1 \left(P'(f_0(x))u(x) + Q'(f_0'(x))u'(x)\right)\mathrm{d}x$$

**9.** Puisque, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_0 + tu$ est une fonction de $E$ ($u$ s'annule en 0 et 1), on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $q(0) \leqslant q(t)$. Ainsi $q$ admet un minimum en 0 et $q'(0) = a_1 = 0$. Cela donne, pour tout $u \in E^2_{0,0}$,

$$\int_0^1 \left(P'(f_0(x))u(x) + Q'(f_0'(x))u'(x)\right)\mathrm{d}x = 0$$

On intègre par parties le second terme :

$$\int_0^1 Q'(f_0'(x))u'(x)\mathrm{d}x = \left[Q'(f_0'(x))u(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(Q'(f_0'(x))\right)u(x)\mathrm{d}x$$

puisque $u$ s'annule en 0 et 1, on obtient alors

$$\int_0^1 \left(P'(f_0(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(Q'(f_0'(x))\right)\right)u(x)\mathrm{d}x = 0$$

Cette relation étant vraie pour tout $u \in E^2_{0,0}$, on en déduit que,

$$\forall x \in [0,1], P'(f_0(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(Q'(f_0'(x))\right) = 0.$$

**Exemples**

**10.** On a $P = 0$ et $Q = X^2$ donc $P' = 0$ et $Q' = 2X$.L'équation différentielle correspondante est

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2f_0'(x)\right) = 2f_0''(x) = 0$$

La fonction $f_0$ est donc affine sur $[0,1]$.Pour être dans $E^2_{0,1}$, elle doit vérifier $f_0(0) = 0$ et $f_0(1) = 1$. La fonction $f_0$ est donc la fonction identité. Si la fonction $J$ admet un minimum sur $E^2_{0,1}$ alors ce minimum est atteint pour la fonction identité et ce minimum vaut 1.

**11.** On doit vérifier que si $f \in E^2_{0,1}$ alors $J(f) \geqslant 1$. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz comme proposé. Afin de faire apparaître $f'^2$, on peut utilisier $1.f'$ :

$$\left(\int_0^1 1.f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 1^2\mathrm{d}x.\int_0^1 f'(x)^2\mathrm{d}x$$

Cela donne $J(f) \geqslant (f(1)-f(0))^2 = 1$. On a bien montré que $J$ admet un minimum et qu'il est atteint uniquement pour $f : x \mapsto x$ (avec une valeur 1).

**12.** On a cette fois $P = 0$ et $Q = X^2 + X^3$ donc $Q' = 2X + 3X^2$. L'équation différntielle est donc

$$\forall x \in [0,1], \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2f_0'(x) + 3f_0'(x)^2\right)\right) = 0$$

La fonction $2f_0'(x) + 3f_0'(x)^2$ est donc constante, égale à une certaine valeur $c$. Pour tout $x \in [0,1]$, $f_0'(x)$ est solution de $3y^2 + 2y - m = 0$ donc ne peut prendre que 2 valeurs possibles. Puisque $f_0'$ est continue, elle est constante égale à l'un de ces valeurs (si elle prend deux valeurs distinctes, le théorème des valeurs intermédiaires s'applique et la fonction prendrait une infinité de valeurs). Ainsi $f_0'$ est constante et de nouveau $f_0$ est affine. Si de plus $f_0$ est dans $E^2_{0,0}$ alors $f_0$ est nulle. La seule fonction où le minimuù serait atteint est la fonction nulle.

**13.** On calcule... $f'(x) = 2x - 3x^2$ et on trouve $\frac{8}{105}$ ce qui ne donne pas de contradiction... on s'inspire alors du début de la partie C avec $q(t) = J_2(0 + tf)$ (puisque $f$ est dans $E^2_{0,0}$). On obtient

$$J_2(tf) = t^2\int_0^1 f'(x)^2\mathrm{d}x + t^3\int_0^1 f'(x)^3\mathrm{d}x = \frac{2}{15}t^2 - \frac{2}{35}t^3 = \frac{2}{5}t^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}t\right)$$

Dès que $t > \frac{7}{3}$ alors cette quantité est négative donc $J_2$ n'admet pas 0 comme minimum (*sérieusement... quelqu'un a-t-il vraiment fait les calculs le jour de l'épreuve ?*)

## D. Un exemple avec dérivée seconde

**14.** On a $|ff''| \leqslant \frac{1}{2}(f^2 + f''^2)$. Par comparaison $ff''$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Soit $X > 0$, on a

$$\int_0^X f(t)f'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(f^2(X) - f^2(0))$$

Si $ff'$ tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ alors $\int_0^X ff'$ tendrait vers $+\infty$ lorsque $X \to +\infty$ et $f^2$ aurait également une limite infinie en $+\infty$ ce qui contredit l'intégrabilité de $f^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

**15.** On a, pour $X > 0$,

$$\int_0^X f(t)f''(t)\mathrm{d}t = \left[f(t)f'(t)\right]_0^X - \int_0^X f'(t)^2\mathrm{d}t$$

où encore

$$\int_0^X f'(t)^2\mathrm{d}t = f(X)f'(X) - f(0)f'(0) - \int_0^X f(t)f''(t)\mathrm{d}t$$

Puisque $f'^2$ est continue positive, $X \mapsto \int_0^X f'(t)^2\mathrm{d}t$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et admet soit une limite finie, soit une limite infinie lorsque $X \to +\infty$. Puisque $ff''$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $X \mapsto \int_0^X f(t)f''(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $X \to +\infty$. Si $f'^2$ n'était pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$ alors $ff'$ aurait une limite infinie en $+\infty$ ce qui n'est pas le cas. On en déduit que $f'^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (puisque $\int_0^{+\infty} f'^2(t)\mathrm{d}t$ converge et $f'^2 \geqslant 0$).

**16.** On prend les notations de l'énoncé pour $e_1$ et $e_2$ et on note

$$e_3(t) = e^{t/2}\cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ et } e_4(t) = e^{t/2}\sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Puisque $e_1^2(t) \leqslant e^{-t}$ et $e_2^2(t) \leqslant e^{-t}$, les fonctions $e_1$ et $e_2$ sont dans $L^2$. On cherche les fonctions $f = \sum_{k=1}^4 a_ke_k$ qui sont dans $L_2$. Puisque $L_2$ est un espace vectoriel et puisque $a_1e_1 + a_2e_2$ est dans $L^2$, on doit avoir $f \in L_2$ si et seulement si $g = a_3e^3 + a_4e^4$ dans $L_2$. On ne s'intéresse plus qu'à ces fonctions, sous la forme $\gamma e_3 + \delta e_4$ (plus court). On a

$$g^2(t) = e^t\left(\gamma\cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \delta\sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \geqslant \left(\gamma\cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \delta\sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2.$$

On peut écrire $\gamma\cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \delta\sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sour la forme $A\cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} - \varphi\right)$ avec $A^2 = \gamma^2 + \delta^2$. On a alors

$$\int_0^X g^2(t)\mathrm{d}t \geqslant A^2\int_0^X \cos^2\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} - \varphi\right)\mathrm{d}t = \frac{A^2}{2}\int_0^X 1 + \cos\left(t\sqrt{3} - 2\varphi\right)\mathrm{d}t$$

et cette dernière intégrale tend vers $+\infty$ lorsque $X$ tend vers $+\infty$ si $A \neq 0$. On en déduit qu'on doit avoir $A = 0$, c'est-à-dire $\gamma = \delta = 0$. Finalement la fonction est dans $L^2$ si et seulement si elle est dans $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. On vérifie que si $f \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ alors $f''$ l'est encore et ainsi $f''$ est dans $L^2$.

Finalement les solutions de $(Z)$ qui appartiennent à $E$ sont les fonctions de $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

**17.** Si $J$ présente un minimum en $f$ alors on vient de boir que $f$ est sous la forme $\alpha e_1 + \beta_2$. On résout l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$. L'espace des solutions sur $\mathbb{R}_+$ est un espace vectoriel de dimension 2, l'équation caractéritique associée est $r^2 + r + 1 = 0$ donc les solutions sont $j$ et $\overline{j}$. Un système fondamental de solutions de $y'' + y' + y = 0$ est donc $(e_1, e_2)$. La fonction $f$ est bien une solution de $y'' + y' + y = 0$. De plus $J$ doit être minimal donc la quantité $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{2\beta^2}{4} + \frac{\alpha\beta\sqrt{3}}{2}$ doit être minimale. Or

$$\frac{\alpha^2}{4} + \frac{2\beta^2}{4} + \frac{\alpha\beta\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

ce qui impose $\alpha = -\beta\sqrt{3}$ et

$$\begin{aligned} f(t) &= \beta e^{-t^2}\left(-\sqrt{3}\cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\ &= 2\beta e^{-t^2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\ &= 2\beta e^{-t^2}\left(\sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos(\frac{\pi}{3})-\cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin(\frac{\pi}{3})\right) \\ &= 2\beta\psi(t) \end{aligned}$$

**18.** On a

$$(f(A)+f'(A))^2-((f(0+f'(0))^2 = \left[(f(t)+f'(t))^2\right]_0^A = \int_0^A [(f+f')^2]'(t)\mathrm{d}t$$

et $((f+f')^2)' = (f^2+2ff'+f'^2)' = 2ff'+2f'^2+2ff''+2f'f''$. On obtient alors

$$(f+f'+f'')^2-((f+f')^2)' = f^2-f'^2+f''^2$$

et ainsi la relation proposée.

**19.** On sait que $f, f'$ et $f''$ sont dans $L^2$ ainsi $f^2-f'^2+f''^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $f+f'+f''$ est dans $L^2$ donc $(f+f'+f'')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit l'existence de limites finies pour chacune des deux intégrales précédentes donc pour $(f(A)+f'(A))^2$ lorsque $A$ tend vers $+\infty$. Or de nouveau $f+f'$ est dans $L^2$ donc $(f+f')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ avec $(f+f')^2$ qui admet une limite finie donc cette limite est nulle. On obtient finalement

$$J(f) = \int_0^{+\infty}(f+f'+f'')^2(x)\mathrm{d}x+(f(0)+f'(0))^2$$

On a donc $F(j) \geqslant 0$ pour tout $f \in E$. On s'intéresse alors aux fonctions $f = \lambda\psi$. On sait qu'elles vérifie $f+f'+f'' = 0$. On a également $\psi(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f'(0) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{3} = 2\frac{\sqrt{3}}{4}$. Ainsi $\psi(0)+\psi'(0) = 0$ et il en est de même avec $f$. Pour toute fonction $f = \lambda\psi$, on a $J(f) = 0$.

**20.** Puisqu'on a une somme de deux termes positifs, il suffirait de chercher les fonctions qui vérifie $\int_0^{+\infty}(f+f'+f'')^2(x)\mathrm{d}x = 0$ et $f(0)+f'(0) = 0$ donc les fonctions solutions de $y''+y'+y = 0$ avec $f'(0) = -f(0)$.

## E. Application : une inégalité de Hardy et Littlewood

**21.** On utilise les recommandations de l'énoncé, ce qui donne

$$\|f_\mu\|^2-\left\|f'_\mu\right\|^2+\left\|f''_\mu\right\|^2 \geqslant 0$$

Or

$$\left\|f'_\mu\right\|^2 = \int_0^{+\infty}(\mu f'(\mu x))^2\mathrm{d}x = \mu\int_0^{+\infty}(f'(\mu x))^2\mu\mathrm{d}x = \mu\|f'\|^2$$

avec le changement linéaire « $t = \mu x$ ». De même $\left\|f''_\mu\right\|^2 = \mu^2\|f''\|^2$. On aurait du commencer par cela pour justifier que $f_\mu$ est aussi dans $E$.
Il reste alors, pour tout $\mu \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mu^2\|f''\|^2-\mu\|f'\|^2+\|f\|^2 \geqslant 0$$

Cette inégalité est vraie pour $\mu = 0$ et également pour $\mu < 0$. On a donc

$$\forall\mu \in \mathbb{R}, \mu^2\|f''\|^2-\mu\|f'\|^2+\|f\|^2 \geqslant 0$$

Lorsque $\|f''\| = 0$ alors l'inégalité demandée est vraie. Sinon le discriminant de ce trinôme est négatif ou nul, ce qui donne

$$\|f'\|^4 \leqslant 4\|f\|^2\|f''\|^2$$

et le résultat puisque toutes les normes sont positives.

**22.** Le cas d'égalité équivaut à l'existence de $\mu$ racine double du polynôme. Si $\mu < 0$, on obtient $\mu^2\|f''\|^2-\mu\|f'\|^2+\|f\|^2 = 0$ et chaque terme est positif donc $\|f\| = 0$ et $f = 0$. On a également $f = 0$ si $\mu = 0$. Si $\mu > 0$, alors $f_\mu$ vérifie $J(f_\mu) = 0$ et $f_\mu$ est colinéaire à $\psi$. Réciproquement ces fonctions conviennent. Finalement on a "égalité si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) = \lambda\psi(t/\mu)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu > 0$.