

Mathématiques

MPI/MPI*

Cahier de vacances

David Rupprecht

Lycée P. de Fermat

<https://www.cpge-fermat.fr>
david.rupprecht@ac-toulouse.fr



1

NOMBRES COMPLEXES

Dans tous les chapitres, le symbole ✓ désigne un exercice à faire absolument et à maîtriser, le symbole ✨ un exercice plus difficile.

I. NOMBRES COMPLEXES

MODULES

L'ESSENTIEL - MODULES

- $z\bar{z} = |z|^2$ (souvent utilisée pour le calcul)
- $|z| = |\bar{z}|$, $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ et $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ si $z_2 \neq 0$.
- $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ avec égalité si, et seulement si z est réel.
- $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ avec égalité si, et seulement si z est imaginaire pur.
- *Inégalité triangulaire* : $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- *Seconde inégalité triangulaire* : $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2|$.
- *Cas d'égalité* $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z_1 = \lambda z_2$ ou $z_2 = \lambda z_1$.
- *généralisation* : $|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n|$ si, et seulement si, il existe $z \in \mathbb{C}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $z_i = \lambda_i z$ pour tout i .

ARGUMENTS

L'ESSENTIEL - ARGUMENTS

- On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1. Cet ensemble est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$. On note $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
- L'application $\begin{cases} (\mathbb{R}, +) & \rightarrow (\mathbb{U}, \times) \\ \theta & \mapsto e^{i\theta} \end{cases}$ est un morphisme de groupes, surjectif et dont le noyau est l'ensemble des multiples entiers de 2π .
Cela signifie que :
 - si $|z| = 1$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$, $z = e^{i\theta}$,
 - on a $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si, et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$, $\theta' - \theta = 2k\pi$,
 - on a $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$ et $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.
- On appelle argument d'un nombre complexe **non nul** z , tout réel θ tel que $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$. On note alors $\arg z = \theta [2\pi]$.
- Si z, z' sont non nuls
 - $\arg(zz') = \arg z + \arg z' [2\pi]$,
 - $\arg(1/z) = -\arg z [2\pi]$.
- les arguments sont définis modulo 2π . On fera par exemple attention de ne pas écrire $\arg zz' = \arg z + \arg z'$.

RACINES n -IÈMES

Proposition 1 (Racines d'un complexe)

soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n -ième de a tout complexe z tel que $z^n = a$. Si une forme trigonométrique de $a \neq 0$ est $a = \rho e^{i\theta}$, alors les racines n -ièmes de a sont les n nombres complexes 2 à 2 distincts

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}} \text{ où } k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket.$$

Proposition 2 (Racines de l'unité)

On appelle racine n -ième de l'unité, tout complexe z tel que $z^n = 1$. Il y en a exactement n . On appelle alors $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité. On a $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$ et

$$\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\}.$$



L'ESSENTIEL - RACINES

- Si on note $\omega = e^{2i\pi/n}$, alors $\mathbb{U}_n = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}$. On peut remplacer les exposants $\llbracket 0; n-1 \rrbracket$ par n'importe quelle suite de n entiers consécutifs.
- La somme des racines n -ièmes de l'unité vaut 0.
- Si z_0 est une racine n -ième d'un nombre complexe a non nul, alors on obtient toutes les racines n -ièmes de a en multipliant z_0 par les n racines n -ièmes de l'unité.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

L'ESSENTIEL

Soit A, B et M des points d'affixe respective a, b et z , alors

- $|b-a| = AB$ et $\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = \frac{AM}{BM}$ (z différent de b),
- $\arg a = (\vec{i}, \vec{OA}) [2\pi]$ (a non nul),
- $\arg \left(\frac{z-a}{z-b} \right) = (\vec{BM}, \vec{AM}) [2\pi]$ (z différent de a et b).

Exercice 1 (Identité du parallélogramme)

[✓] Montrer que pour tout z et z' complexes, on a $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$.

Exercice 2 (Inégalité triangulaire)

[✓] Soient z et z' deux complexes. Montrer que $|z+z'| \leq |z| + |z'|$ avec égalité si et seulement s'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}^+$ tels que $z = \lambda z_0$ et $z' = \lambda' z_0$.

Exercice 3



Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants (lorsqu'ils existent), donner module et un argument : $(1+i)^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$), $1 + e^{i\theta}$ et $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$

Exercice 4

Résoudre $(z^2 + 1)^n - (z+i)^{2n} = 0$.

II. TRIGONOMÉTRIE

$\cos(a+b)$	=	$\cos a \cos b - \sin a \sin b$	
$\cos(a-b)$	=	$\cos a \cos b + \sin a \sin b$	
$\sin(a+b)$	=	$\sin a \cos b + \sin b \cos a$	
$\sin(a-b)$	=	$\sin a \cos b - \sin b \cos a$	
$\cos 2a$	=	$2\cos^2 a - 1$	$\sin 2a = 2\sin a \cos a$
	=	$1 - 2\sin^2 a$	
$\cos^2 a$	=	$\frac{1+\cos 2a}{2}$	$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$
$\sin \theta$	=	$\frac{2t}{1+t^2}$	avec $t = \tan \frac{\theta}{2}$
$\cos \theta$	=	$\frac{1-t^2}{1+t^2}$	
$\tan \theta$	=	$\frac{2t}{1-t^2}$	
$\tan(a+b)$	=	$\frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$	



III. OPÉRATIONS À CONNAÎTRE



MÉTHODE - TRANSFORMATIONS TRÈS IMPORTANTES À CONNAÎTRE

$$\begin{aligned}
 1 + e^{i\theta} &= e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) = 2 \cos(\theta/2) e^{i\theta/2} \\
 1 - e^{i\theta} &= e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}) = -2i \sin(\theta/2) e^{i\theta/2} \\
 e^{ia} + e^{ib} &= e^{i\frac{a+b}{2}} (e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{i\frac{b-a}{2}}) = 2 \cos \frac{a-b}{2} e^{i\frac{a+b}{2}}.
 \end{aligned}$$

EXEMPLE - LINÉARISER DES PRODUITS SIMPLES

on veut linéariser $\sin a \sin b$. On voit que ce terme apparaît dans $\cos(a+b)$. On écrit alors

$$\begin{aligned}
 \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
 \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
 \hline
 \cos(a-b) - \cos(a+b) &= 2 \sin a \sin b
 \end{aligned}$$

ce qui donne $\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$. *remarque* : on peut également utiliser les formules d'Euler.

EXEMPLE - LINÉARISER DES PUISSANCES À L'AIDE DES FORMULES D'EULER

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

$$\text{exemple : } \cos^3 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 = \frac{(e^{i\theta})^3 + 3(e^{i\theta})^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} (e^{-i\theta})^2 + (e^{-i\theta})^3}{8} = \frac{e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}}{8} = \frac{\cos 3\theta + 3 \cos \theta}{4}.$$

EXEMPLE - ADDITIONNER DES SINUS OU COSINUS

On veut additionner $\cos p + \cos q$. On utilise

$$e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} (e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{i\frac{q-p}{2}}) = 2 \cos \frac{p-q}{2} e^{i\frac{p+q}{2}},$$

puis on prend la partie réelle, ce qui donne :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}.$$

On peut également utiliser $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ avec $p = a+b$ et $q = a-b$, ce qui revient à $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$.

EXEMPLE - DÉVELOPPER EN PUISSANCES DE SINUS OU COSINUS

Exprimer $\sin 3\theta$ en fonction de $\sin \theta$. Puisque $\sin 3\theta = \text{Im}(e^{3i\theta})$,

$$\begin{aligned}
 e^{3i\theta} &= (e^{i\theta})^3 = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3i \sin \theta \cos^2 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta \\
 &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) + i(3 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta)
 \end{aligned}$$

ainsi $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ et $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$.

**MÉTHODE - TRANSFORMER DES COMBINAISONS LINÉAIRES SOUS LA FORME $a \cos x + b \sin x$**

on a $a \cos x + b \sin x = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)(a - ib))$. Avec $R = |a - ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $a - ib = Re^{-i\varphi}$, cela donne $a \cos x + b \sin x = \operatorname{Re}(Re^{i(x-\varphi)}) = R \cos(x - \varphi)$.

En pratique, on factorise par $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right).$$

Puisque

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1,$$

il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi \end{cases}$. On termine alors grâce à la formule $\cos(x - \varphi)$.

EXEMPLE - FONDAMENTAL - DÉTERMINER DES SOMMES DE SINUS OU COSINUS :

soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \sum_{k=0}^n \cos k\theta \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^n \sin k\theta.$$

On a

$$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k.$$

Si $e^{i\theta} \neq 1$, alors on obtient

$$C_n + iS_n = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}} \left(\frac{-2i \sin((n+1)\theta/2)}{-2i \sin(\theta/2)} \right),$$

ce qui donne, après simplifications,

$$C_n = \frac{\cos \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \text{ et } S_n = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Les valeurs ne sont pas à connaître mais la méthode doit être **entièrement maîtrisée**.

IV. EXERCICES

EXERCICES À FAIRE

Exercice 5 (Inégalité triangulaire généralisée)

Soient $z_1, z_2, \dots, z_n$ des nombres complexes. Montrer que $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$ avec égalité si et seulement s'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $z_k = \lambda_k z_0$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Exercice 6

Déterminer les nombres complexes z tels que $|z| = |z + 1| = 1$.

Exercice 7

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que $|a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|$, et étudier les cas d'égalité.

Exercice 8

Soit $z \in \mathbb{C}$ différent de 1. Montrer que $\frac{1+z}{1-\bar{z}} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$.

Exercice 9

Déterminer les complexes z tels que $z^2 = -33 + 56i$.

**Exercice 10**

Déterminer les complexes z tels que $z^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}$. En déduire des valeurs simples pour $\cos(\frac{\pi}{8})$, $\sin(\frac{\pi}{8})$ et vérifier que $\tan(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} - 1$.

Exercice 11

Soient a, b et c trois complexes de module 1 avec $a \neq c$. Montrer que $\frac{a(b-c)^2}{b(a-c)^2} \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 12 (Calculs très importants)

Pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on note $D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^n D_k(x)$. Simplifier les deux écritures et vérifier que S_n est positive.

Exercice 13

1. On note $U_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $V_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$. Déterminer U_n et V_n en fonction de n .

2. On note

$$U_n = \sum_{0 \leq 3k \leq n} \binom{n}{3k}, V_n = \sum_{0 \leq 3k+1 \leq n} \binom{n}{3k+1} \text{ et } W_n = \sum_{0 \leq 3k+2 \leq n} \binom{n}{3k+2},$$

Déterminer U_n, V_n et W_n en fonction de n .

Exercice 14

Soit n un entier, $n \geq 2$, et $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n$.

Exercice 15

Soit n un entier, $n \geq 2$, et $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer $S_n = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=p}^{n-1} \binom{q}{p} \omega^{p+q}$.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES**Exercice 16 (Mines MP)**

Soit a, b et c de module 1 tels que $a + b + c = 0$. Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

Exercice 17

Soient trois complexes non nuls a, b et c tels que $a + b + c = 0$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Montrer que les trois complexes ont le même module. Que peut-on dire de plus?

Exercice 18 (Mines MP)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{2ik\pi/n})$.

Exercice 19

Déterminer un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré minimal ayant $a = 2 \cos \frac{\pi}{5}$ pour racine.

Exercice 20 (Polytechnique - pour 5/2)

Soient G un sous-groupe de $\mathbb{U}$, $\Gamma = \left\{ z \in G; |z-1| < \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$, H le sous-groupe de G engendré par Γ . Exprimer une condition pour que H ne soit pas réduit à $\{1\}$ et prouver qu'alors $H = G$.



2 DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

I. GÉNÉRALITÉS

FACTORISATION D'UN POLYNÔME

Proposition 3 (Factorisations de polynômes dans $\mathbb{C}[X]$)

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$. Alors P se factorise de façon unique sous la forme

$$P = \lambda(X - a_1)^{\alpha_1} \cdots (X - a_p)^{\alpha_p},$$

où les complexes $a_1, \dots, a_p$ sont deux à deux distincts et les exposants $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des entiers naturels non nuls (tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = n$).

Proposition 4 (Factorisations de polynômes dans $\mathbb{R}[X]$)

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$. Alors P se factorise de façon unique sous la forme

$$P = \lambda(X - a_1)^{\alpha_1} \cdots (X - a_p)^{\alpha_p} (X^2 - s_1 X + p_1)^{\beta_1} \cdots (X^2 - s_q X + p_q)^{\beta_q},$$

où

- les **réels** $a_1, \dots, a_p$ sont deux à deux distincts.
- les facteurs **réels** $X^2 - s_k X + p_k$ sont deux à deux distincts avec $s_k^2 - 4p_k < 0$ pour $k \in \llbracket 1; q \rrbracket$ (les facteurs sont irréductibles sur $\mathbb{R}$).
- les exposants $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ et $\beta_1, \dots, \beta_q$ sont des entiers naturels non nuls.

Remarque : les facteurs du second degré correspondent au produit de deux facteurs conjugués $(X - z)(X - \bar{z})$.

PARTIE ENTIÈRE

Définition 1 (partie entière)

Soit A/B une fraction irréductible. On rappelle que la division euclidienne de A par B s'écrit $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$. On appelle alors partie entière de la fraction rationnelle A/B le polynôme Q . On a alors l'écriture $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$. On peut alors se ramener à l'étude de la décomposition d'une fraction sous la forme A/B avec $\deg A < \deg B$.

Attention

Très important Tout ce qui suit sur les décompositions suppose que le numérateur est de degré strictement inférieur à celui du dénominateur. La forme de la décomposition sera faussée si on ne se trouve pas dans cette situation. Il **faudra** donc systématiquement commencer par s'y ramener.

DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES - CAS COMPLEXE

Proposition 5

On considère une fraction rationnelle irréductible $F = A/B$ avec $\deg A < \deg B$. On factorise B sous la forme

$$B = \lambda(X - a_1)^{\alpha_1} \cdots (X - a_p)^{\alpha_p}.$$

Il existe alors des complexes c_{ij} (uniques) tels que

$$F = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{c_{ij}}{(X - a_i)^j} \right).$$

En d'autres termes on décompose la fraction en fractions plus simples. Pour chaque facteur $(X - a)^\alpha$ qui apparaît dans la factorisation de B , on voit apparaître les fractions $\frac{1}{X - a}, \frac{1}{(X - a)^2}, \dots, \frac{1}{(X - a)^\alpha}$ dans la décomposition. Il n'y a plus qu'à déterminer les constantes devant ces fractions.



DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES - CAS RÉEL

Le théorème est assez proche mais un peu plus compliqué. Avec les mêmes hypothèses, B se factorise dans $\mathbb{R}[X]$ sous la forme

$$B = \lambda(X - a_1)^{\alpha_1} \cdots (X - a_p)^{\alpha_p} (X^2 + b_1X + c_1)^{\beta_1} \cdots (X^2 + b_qX + c_q)^{\beta_q},$$

→ pour chaque facteur $(X - a)^\alpha$, on écrit dans la décomposition les fractions

$$\frac{c_1}{X - a}, \frac{c_2}{(X - a)^2}, \dots, \frac{c_\alpha}{(X - a)^\alpha},$$

où c_i est un réel.

→ pour chaque facteur $(X^2 + bX + c)^\beta$ (irréductible dans $\mathbb{R}$), on fait apparaître les fractions

$$\frac{c_1X + d_1}{X^2 + bX + c}, \frac{c_2X + d_2}{(X^2 + bX + c)^2}, \dots, \frac{c_\beta X + d_\beta}{(X^2 + bX + c)^\beta},$$

où les constantes c_k et d_k sont réelles.

II. TECHNIQUES DE DÉCOMPOSITION

On se donne une fraction rationnelle irréductible $F = A/B$ et on cherche sa décomposition en éléments simples. On n'oubliera pas de vérifier que $\deg A < \deg B$ et si ce n'est pas le cas, on commencera par effectuer la division euclidienne de A par B pour s'y ramener. On supposera être dans ce cas dans la suite de ce chapitre.

CAS RÉEL

Pour une décomposition avec des facteurs réels irréductibles de degré 2 au dénominateur, de multiplicité 1, on a le choix entre chercher directement la décomposition en réel et la faire en complexe puis regrouper les termes conjugués (cela ne fonctionne pas si les exposants sont plus grand que 1).

MÉTHODE DIRECTE

On sait sous quelle forme se décompose la fraction. On réduit les fractions intervenant dans la décomposition au même dénominateur et on identifie le numérateur obtenu avec celui de la fraction de départ. On obtient un système d'équations linéaires où les inconnues sont les constantes devant les éléments simples. Ce n'est à envisager sous cette forme que pour des cas très simples (et dans ces cas on utilisera de toute façon des méthodes plus rapides). En revanche cette méthode pourra/devra être utilisée lorsqu'on aura réussi à déterminer certains coefficients et qu'on a utilisé toutes les astuces connues. Il ne restera en général que très peu de coefficients à déterminer.

TERMES DE PLUS HAUT EXPOSANT

Termes de degré 1

On considère un facteur $(X - a)^k$ dans la factorisation de B (k maximum). On peut écrire $B = (X - a)^k C$ avec $C(a) \neq 0$. On multiplie alors les deux cotés de l'égalité (d'un côté la fraction, de l'autre la décomposition) par $(X - a)^k$ puis on remplace X par a . À gauche, il reste $A(a)/C(a)$ et à droite le coefficient de $1/(X - a)^k$ (tous les autres termes ont au moins $X - a$ en facteur). *Cela ne fonctionne que pour le terme de plus grand exposant.*

On peut remarquer que si a est racine de multiplicité k dans B alors $B = \frac{B^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k + \dots = (X - a)^k C$ avec $C(a) = \frac{B^{(k)}(a)}{k!}$. Ainsi le coefficient de $\frac{1}{(X - a)^k}$ dans la décomposition en éléments simples est $\frac{k!A(a)}{B^{(k)}(a)}$. Notamment si a est racine simple du dénominateur alors le terme est $\frac{A(a)}{B'(a)}$.

EXEMPLE

On veut décomposer

$$F_1 = \frac{3X^2 + X - 2}{(X - 1)^2(X + 2)^2}.$$

La décomposition va s'écrire

$$F = \frac{a}{(X - 1)^2} + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{(X + 2)^2} + \frac{d}{X + 2}.$$

Pour obtenir a , on multiplie F par $(X - 1)^2$ puis on remplace X par 1 (en fait on « cache » le facteur $(X - 1)^2$). Il vient

$$a = \left(\frac{3X^2 + X - 2}{(X + 2)^2} \right)_{|X=1} = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}.$$

De même

$$c = \left(\frac{3X^2 + X - 2}{(X - 1)^2} \right)_{|X=-2} = \frac{8}{9}.$$

Termes de degré 2

Pour un facteur $(X^2 + bX + c)^\beta$ (irréductible et de plus grand exposant), on peut réaliser la même opération et instancier X à l'une des racines de $X^2 + bX + c$. Puisque les constantes qui apparaissent dans la décomposition sont réelles (on part d'un polynôme à coefficients réels), on aura directement les deux constantes.

EXEMPLE

On veut décomposer

$$F_2 = \frac{3X+1}{(X+1)^2(X^2+X+1)}.$$

On sait que la décomposition va s'écrire

$$F_2 = \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+X+1}.$$

On multiplie par $X^2 + X + 1$ puis on évalue en $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$:

$$\left(\frac{3X+1}{(j+1)^2} \right)_{X=j} = cj + d.$$

Or $1/(j+1)^2 = 1/(-j^2)^2 = 1/j^4 = j^2$ (on utilise $j^3 = 1$ et $1+j+j^2 = 0$). Il vient

$$cj + d = (3j+1)j^2 = 3j^3 + j^2 = 3 + j^2.$$

Le partie réelle donne $-\frac{c}{2} + d = 3 - \frac{1}{2}$ la partie imaginaire $c\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. On a donc $c = -1$ puis $d = 2$.

COMPORTEMENT EN L'INFINI

Une astuce supplémentaire consiste à multiplier chaque coté par X puis faire tendre X vers $+\infty$. On obtient alors parfois une nouvelle équation.

PARITÉ

Si la fraction F est paire ou impaire ($F(-X) = \pm F(X)$), on pourra utiliser l'unicité de la décomposition pour trouver de nouvelles relations

EXEMPLE

Soit $F_3 = \frac{1}{(X^4+1)} = \frac{1}{(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)}$. On remarque que $F_3(X) = F_3(-X)$. La décomposition de F_3 va s'écrire

$$F_3 = \frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1}.$$

la décomposition de $F_3(-X)$ va alors être (on remplace au dessus)

$$\begin{aligned} F_3(-X) &= \frac{-aX+b}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{-cX+d}{X^2-\sqrt{2}X+1} \\ &= \frac{-cX+d}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{-aX+b}{X^2+\sqrt{2}X+1} \\ F_3(X) &= \frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1} \end{aligned}$$

Ainsi en utilisant l'unicité des coefficients, on obtient les relations $a = -c$ et $b = d$ (deux fois).

Remarque : La factorisation du numérateur vient de $X^4 + 1 = (X^2 + 1)^2 - 2X^2 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$.

L'ESSENTIEL - CAS PARTICULIERS

On veut décomposer en éléments simples la fraction $\frac{A}{B}$ avec $\deg A < \deg B$:

- si a est racine simple de B , le coefficient de $\frac{1}{X-a}$ est $\frac{A(a)}{B'(a)}$
- si a est racine de multiplicité k de B , le coefficient de $\frac{1}{(X-a)^k}$ est $k! \frac{A(a)}{B^{(k)}(a)}$
- si $P = \lambda \prod_{k=1}^p (X - a_i)^{\alpha_i}$ alors $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^p \frac{\alpha_i}{X - a_i}$.



III. EXERCICES

EXERCICES À FAIRE

Exercice 1

Refaire et terminer les décompositions des fractions F_1, F_2 et F_3

Exercice 2

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions suivantes

a) $\frac{1}{X(X+1)(X+2)}.$

d) $\frac{2X+1}{(X^2-X)^2}.$

f) $\frac{X^4}{(X+1)(X^2-1)}.$

b) $\frac{1}{X(X^2+1)}.$

g) $\frac{1}{X^n-1}$ (avec $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

c) $\frac{1}{X^3+1}.$

e) $\frac{X^4-1}{X^2(X+1)}.$

h) $\frac{X^5+X+1}{X^4-1}$

Exercice 3

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ n'admettant que des racines simples non nulles $x_1, \dots, x_n$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i P'(x_i)} = -\frac{1}{P(0)}$. Que vaut $\sum_{i=1}^n \frac{1}{P'(x_i)}$?

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $] -1, 1[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée d'ordre n de f (et la donner sous forme de fraction).

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 5

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ (avec $n \geq 2$). Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x)P''(x) \leq P'^2(x)$.

3

CALCUL D'INTÉGRALES

I. CALCULS

RÉSULTATS GÉNÉRAUX

L'ESSENTIEL

→ Intégration par parties : si f, g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$$

→ Intégration par parties généralisée : si f, g sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur un segment $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)g^{(n)}(t) dt = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(k)}(t)g^{(n-1-k)}(t) \right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}(t)g(t) dt.$$

→ Changement de variable : soit f continue sur un intervalle I , et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans I , on a

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx.$$

→ Changement de variable bijectif : soit f continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, et φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle I sur un intervalle J contenant $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx.$$

L'ESSENTIEL - SYMÉTRIES, PÉRIODICITÉ

Si f est une fonction continue par morceaux, alors

→ si f est *paire* sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$,

→ si f est *impaire* sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$,

→ si f est de période T , alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

- $\int_a^b f(t) dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t) dt$ (périodicité),
- $\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_b^{b+T} f(t) dt$ (l'intégrale sur une période ne dépend pas du point de départ).

MÉTHODES DE CALCULS



MÉTHODE - FRACTIONS RATIONNELLES

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples et on calcule les intégrales de chacun des termes

→ Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{(t-a)^n}$ sur $] -\infty, a[$ ou $] a, +\infty[$ est la fonction

$$t \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{n-1} \frac{1}{(t-a)^{n-1}} & \text{si } n \neq 1, \\ \ln|t-a| & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

→ Pour les fonctions à intégrer sous la forme $t \mapsto \frac{1}{(at^2+bt+c)^n}$ (qui ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$), on commence par effectuer une mise sous forme canonique afin de se ramener à des primitives de fonctions $t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)^n}$. Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^2+1}$ est $t \mapsto \arctan t$. Lorsque $n \geq 2$, on cherche, à l'aide d'une intégration par parties, une relation entre I_n et I_{n+1} où I_n est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)^n}$

**MÉTHODE - POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES**

On doit chercher des primitives $\int \sin^n t \cos^m t dt$.

→ Par primitive directe : si l'un des exposants est impair, on peut faire apparaître des termes sous la forme $u' u^n$. Par exemple, si $m = 2p + 1$, on écrit

$$\sin^n t \cos^m t = \sin^n t (\cos^{2p} t) \cos t = (\sin^n t (1 - \sin^2 t)^p) \cos t.$$

En développant le terme à la puissance p , on fait apparaître une combinaison de termes sous la forme $\sin^q t \cos t$ qui s'intègrent facilement.

→ Par linéarisation : (dans le cas m et n pairs) en utilisant les formules de trigonométrie ou les formules d'Euler.

**MÉTHODE - POLYNÔMES ET EXPONENTIELLES**

On cherche des primitives de fonctions $t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$ où P est un polynôme de degré n et α un réel ou un complexe non nul (cela permet de traiter le cas des fonctions sinus et cosinus). Une telle primitive est de la forme $t \mapsto Q(t)e^{\alpha t}$ où Q est un polynôme de degré n . On détermine cette primitive en dérivant $t \mapsto Q(t)e^{\alpha t}$ puis en identifiant les coefficients du polynôme en facteur de $e^{\alpha t}$ dans cette dérivée avec ceux de P .

**MÉTHODE - FRACTIONS $F(\sin x, \cos x)$**

→ on peut utiliser le changement de variable $t = \tan(x/2)$ combiné aux formules

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

→ règles de Bioche : si la quantité $F(\sin x, \cos x) dx$ est invariante (ne pas oublier le « dx » lorsqu'on remplace

- x par $-x$: $u = \cos x$
- x par $\pi - x$: $u = \sin x$
- x par $x + \pi$: $u = \tan x$.

**MÉTHODE - FRACTIONS $F(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$**

Après mise sous forme canonique de $ax^2 + bx + c$ et après un changement de variable affine, on se trouve dans l'une des situations suivantes (le but est de transformer à l'aide des formules de trigonométries la partie sous la racine en un carré) :

- $\int G(u, \sqrt{1-u^2}) du$: on utilise le changement de variable $u = \sin t$ ou $u = \cos t$.
- $\int G(u, \sqrt{u^2-1}) du$: on utilise le changement de variable $u = \cosh t$ (alors $\sqrt{u^2-1} = \pm \sinh t$) ou $u = \frac{1}{\cosh t}$ (alors $\sqrt{u^2-1} = \pm \tanh t$).
- $\int G(u, \sqrt{u^2+1}) du$: on utilise le changement de variable $u = \sinh t$ (alors $\sqrt{u^2+1} = \pm \cosh t$).

II. EXERCICES

CALCULS DE BASE

Exercice 1

Calculer les primitives des fonctions suivantes sur les intervalles (que l'on précisera) où elles sont continues

- | | | | |
|---|---|--|---|
| a) $x \mapsto x \arctan x$ | e) $x \mapsto \sin^2 x \cos^3 x$ | k) $x \mapsto \cosh x \sin 2x$ | p) $x \mapsto \frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}$ |
| b) $x \mapsto x(\arctan x)^2$ | f) $x \mapsto \frac{1}{3e^x + 2e^{-x}}$ | l) $x \mapsto \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ | q) $x \mapsto \frac{x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$
(avec $a^2 \neq b^2$) |
| c) $x \mapsto \frac{x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$
($a^2 \neq b^2$) | g) $x \mapsto e^x(2x^2+x+1)$ | m) $x \mapsto \frac{1}{5\cosh x + 3\sinh x + 4}$ | r) $x \mapsto \frac{x+2}{\sqrt{x^2-5x+6}}$ |
| d) $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ | h) $x \mapsto e^{3x}(\cos x + 2\sin x)$ | n) $x \mapsto \frac{1}{x+\sqrt{x}}$ | |
| | i) $x \mapsto \cosh(x) \sin(2x)$ | o) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ | |
| | j) $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$ | | |

**Exercice 2**

Déterminer la valeur des intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$

b) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$

c) $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} dx$

Exercice 3

Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $I(x) = \int_0^1 \min(x, t) dt$.

Exercice 4

Calculer, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la primitive (sur $\mathbb{R}_+^*$) :

$$I(x) = \int_1^x t^\alpha \ln t dt$$

CALCULS PLUS LONGS**Exercice 5**

Calculer les primitives de $x \mapsto \frac{\ln(x^2+4x+5)}{(1+x)^2}$.

Exercice 6

Calculer la valeur de $\int_0^{1/2} \arctan \sqrt{1-x^2} dx$

Exercice 7 (formule des résidus)

1. Soit z un nombre complexe non réel. Déterminer la limite de $\int_{-A}^A \frac{dt}{t-z}$ lorsque A tend vers $+\infty$.
2. Soit P, Q dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $F = \frac{P}{Q}$ soit définie sur $\mathbb{R}$ avec $\deg Q \geq \deg P + 2$. Pour a pôle de F , on note R_a le coefficient de $\frac{1}{X-a}$ dans la décomposition en éléments simples de F . Calculer la somme des R_a lorsque a décrit les pôles de F . En déduire que $\int_{\mathbb{R}} F = 2i\pi \sum_{a \in P^+} R_a$ où P^+ est l'ensemble des pôles de F de partie imaginaire strictement positive.

Remarque : on admet que l'hypothèse $\deg Q \geq \deg P + 2$ garantit l'existence de $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A F(t) dt$.

3. Soit m, n dans $\mathbb{N}$ avec $n > m$. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx$



4

DL, ÉQUIVALENTS

I. ÉQUIVALENTS

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles ou complexes.

Définition 2 (comparaison locale des fonctions)

Soit f, g deux fonctions définies sur I , a dans ou au bord de I .

- $f(x) = o_a(g(x))$: il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a et une fonction ε définie sur $\mathcal{V}$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$, tels que, pour $x \in I \cap \mathcal{V}$, $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$.
- $f(x) = O_a(g(x))$: il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a et une fonction M définie et bornée sur $\mathcal{V}$, tels que, pour $x \in I \cap \mathcal{V}$, $f(x) = g(x)M(x)$.
- $f(x) \sim_a g(x)$: il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a et une fonction ε définie sur $\mathcal{V}$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$, tels que, pour $x \in I \cap \mathcal{V}$, $f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$.

Propriété 6 (en pratique)

Si g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a , alors

$$\begin{aligned} f(x) = o_a(g(x)) &\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \\ f(x) = O_a(g(x)) &\iff \text{il existe } M \geq 0, \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M \text{ sur un voisinage de } a \\ f(x) \sim_a g(x) &\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \end{aligned}$$

⚠ Attention

Équivalence à un réel

- Écrire $f(x) \sim \ell$ équivaut à $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si $\ell \neq 0$.
- Écrire $f(x) \sim 0$ signifie que f est nulle sur un voisinage de a et pas seulement que la limite de f est nulle.

Propriété 7 (croissances comparées : échelles de grandeur en 0)

- si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, $x^\alpha \underset{0}{\ll} \frac{1}{|\ln x|^\beta} \underset{0}{\ll} 1 \underset{0}{\ll} |\ln x|^\beta \underset{0}{\ll} \frac{1}{x^\alpha}$.
- si $\alpha < \beta$, $|\ln x|^\alpha \underset{0}{\ll} |\ln x|^\beta$ et $x^\beta \underset{0}{\ll} x^\alpha$.

En résumé, si le terme tend vers l'infini, plus l'exposant est grand, plus il va « vite » vers l'infini. S'il tend vers 0, alors c'est le contraire.

Propriété 8 (croissances comparées : échelles de grandeur en $+\infty$)

- si $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$, alors $\ln^\beta x \underset{+\infty}{\ll} x^\alpha \underset{+\infty}{\ll} a^x$.
- Si $\alpha < \beta$, alors $\ln^\alpha x \underset{+\infty}{\ll} \ln^\beta x$ et $x^\alpha \underset{+\infty}{\ll} x^\beta$.
- Si $1 < a < b$, alors $1 \underset{+\infty}{\ll} a^x \underset{+\infty}{\ll} b^x$.

Remarque : en posant $\alpha = \ln a$, on a $a^x = e^{\alpha x}$ - on peut alors utiliser l'échelle des fonctions $x \mapsto e^{\alpha x}$ avec $\alpha > 0$ au lieu de $x \mapsto a^x$ avec $a > 1$.

Propriété 9 (Produits et quotients sur les équivalents)

Si $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$, alors

- $f_1 f_2 \sim_a g_1 g_2$
- f_1 et g_1 sont de même signe au voisinage de a - si l'une ne s'annule pas sauf éventuellement en a , l'autre non plus sur un voisinage de a ,
- si f_2 ou g_2 ne s'annule pas sauf éventuellement en a , $f_1 / f_2 \sim_a g_1 / g_2$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1^n \sim_a g_1^n$. Se généralise à une puissance réelle **fixe** si les fonctions sont strictement positives.

**! Attention**

Opérations interdites

- ajouter des équivalents entre-eux ou même d'ajouter un même terme à des termes équivalents,
- composer des équivalents par la gauche : si $f(x) \sim_a g(x)$, alors $h(f(x))$ et $h(g(x))$ ne sont pas forcément équivalents.

Propriété 10 (Composition)

- Si $f \sim_a g$ et $\lim_{x \rightarrow b} h(x) = a$, alors $f \circ h \sim_b g \circ h$ (substitution)
- $e^f \sim_a e^g$ si et seulement si $f - g \xrightarrow{a} 0$ (et pas lorsque $f \sim_a g$),
- si $f \sim_a g$ et que f (ou g) tend vers **une limite finie ℓ positive ou nulle mais différente de 1, ou vers $+\infty$** alors $\ln(f) \sim_a \ln(g)$ (avec des fonctions strictement positives).

Propriété 11 (cas dérivable)

Si f dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors $f(a+h) - f(a) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} f'(a) \cdot h$ (ou $f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a) \cdot (x-a)$).

$\sin(x) \underset{0}{\sim} x$	$\tan(x) \underset{0}{\sim} x$	$\operatorname{sh} x \underset{0}{\sim} x$	$\arcsin(x) \underset{0}{\sim} x$	$\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$	$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$	$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$	$\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$	$\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$	$\operatorname{th}(x) \underset{0}{\sim} x$	

! Attention

un seul terme significatif On a $e^x \underset{0}{\sim} 1$ et $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ mais lorsqu'on écrit $e^x \underset{0}{\sim} 1 + x$, le terme x n'est pas du tout significatif (on a aussi $e^x \underset{0}{\sim} 1 - x$ ou $1 + 2x$ ou $1 + x^2 \dots$). Même si l'écriture est mathématiquement correcte, on supprime tout terme non significatif dans un équivalent afin notamment de ne pas enchaîner sur un erreur impardonnable!!!

II. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

! Attention

remarque Écrire un développement limité revient à écrire une égalité entre deux termes : la fonction et son développement limité (terme $x^n \varepsilon(x)$ **compris**). On peut donc remplacer $f(x)$ par son DL. Il faut en revanche bien comprendre qu'on ne sait rien sur le terme d'erreur $x^n \varepsilon(x)$ (à part la limite de ε en 0). Ainsi, on ne pourra en déduire qu'un comportement local (autour de 0) de la fonction ou encore une limite. Cela ne permettra par exemple **JAMAIS** de montrer une relation ou une inégalité sur un intervalle.

Proposition 12 (existence théorique d'un DL)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, $a \in I$. La fonction f admet un développement limité à l'ordre n en a et pour h dans un voisinage 0 (tel que $a+h \in I$)

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + h^n \varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Proposition 13 (opérations sur les DL)

en dehors des opérations usuelles simples (combinaison linéaire et produit), on a

- **Intégration** : si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et si f' admet un $DL_n(0)$, alors f admet un $DL_{n+1}(0)$ obtenu en intégrant terme à terme le DL de f' et en rajoutant $f(0)$:

$$\text{si } f'(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n), \text{ alors}$$

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

- **Dérivation** : si f et f' admettent des $DL(0)$ respectivement à l'ordre $n+1$ et n , alors la partie régulière du DL de f' s'obtient en dérivant la partie régulière du DL de f .
- **Composition** : si f et g admettent des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives P et Q et $\boxed{f(0)=0}$, alors $g \circ f$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière s'obtient en tronquant au degré n le polynôme $Q \circ P$.
- **Division** : il suffit de savoir inverser un développement limité. Une fois mis en facteur la partie principale de g , on se retrouve à inverser $g(x) = a_k x^k (1+u(x))$ où u est une fonction qui tend vers 0. On applique alors les règles de composition avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

**Attention**

Dérivation, intégration

- « primitiver » un DL ne pose pas de difficulté
- on **ne peut pas** dériver un DL directement

**Attention**

Composition Lorsqu'on doit composer des développements limités, la première chose à faire et **à ne jamais oublier**, est de vérifier qu'on compose bien au bon point. Si on doit calculer le $DL_3(0)$ de $\exp(\cos(x))$, il ne suffit pas de remplacer u par $1 - x^2/2 + o(x^3)$ dans le $DL_3(0)$ de $\exp(u)$ puisque la limite de $\cos$ en 0 est 1.

**Attention**

DL et équivalents

- il faut bien comprendre la grande différence entre ces deux notions. L'équivalent est un nouvel opérateur avec des règles bien précises. Un développement limité revient à écrire une égalité. On peut donc toujours remplacer une fonction par l'un de ses DL, du moment qu'on n'oublie pas le terme $o(x^n)$ ou $x^n \varepsilon(x)$. **On ne remplacera JAMAIS une fonction par un équivalent lorsqu'on travaille avec des égalités.**
- Écrire un développement limité revient à écrire une fonction comme somme de termes de plus en plus négligeables. Le premier de ces termes est donc un équivalent de la fonction. Le DL est en quelque sorte une généralisation des équivalents qui permet d'utiliser beaucoup plus d'opérations (la somme par exemple). Il faut également remarquer qu'on aura souvent recours à un DL pour calculer un équivalent qui n'est pas immédiat.

L'ESSENTIEL - JUSTIFIER L'EXISTENCE D'UN DÉVELOPPEMENT LIMITÉ EN 0

- en montrant qu'on peut écrire $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$ au voisinage de 0 à l'aide des DL usuels et des opérations : combinaisons linéaires, produit, composition (et inverse/quotient) et intégration d'un DL (mais pas en dérivant!!!)
- lorsque la fonction est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un voisinage de 0

III. COMPARAISON DE SUITES

On a des définitions similaires à celles pour les fonctions - la plupart du temps on utilise les versions particulières suivantes (elles ne fonctionnent plus lorsque les suites s'annulent une infinité de fois).

Proposition 14 (comparaisons - version pratique)

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites et les termes de (v_n) sont non nuls à partir d'un certain rang n_0 , alors

- on a $u_n = O(v_n)$ si et seulement si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ est bornée.
- on a $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.
- on a $u_n \sim v_n$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Propriété 15 (règles sur les comparaisons)

- Transitivité :
 - Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.
 - Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$ (idem avec O).
- Sommes :
 - Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
 - on a $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $u_n + v_n \sim v_n$.
 - **pas de résultat sur somme et différence d'équivalents.**
- Produits :
 - Si $u_n \sim u'_n$ et $v_n \sim v'_n$ alors $u_n v_n \sim u'_n v'_n$ (résultat semblable avec le quotient).
 - Si $u_n = o(u'_n)$ et $v_n = o(v'_n)$ alors $u_n v_n = o(u'_n v'_n)$ (résultat semblable avec O mais pas avec le quotient).
- Substitution :
 - Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, alors $f(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} g(u_n)$.

**Attention**

Formules fausses On n'a **SURTOUT PAS** les résultats suivants :

- si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n v_n = o(w_n)$
- si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n v_n \sim v_n$.
- si $u_n \sim v_n$ alors $f(u_n) \sim f(v_n)$.

Propriété 16 (Ordres de grandeur)

- Pour les suites tendant vers $+\infty$: soient $\alpha' > \alpha > 0$, $\beta' > \beta > 0$ et $b > a > 1$, on a

$$(\ln n)^\alpha \ll (\ln n)^{\alpha'} \ll n^\beta \ll n^{\beta'} \ll a^n \ll b^n \ll n! \ll n^n.$$

- Pour les suites de limite nulle : soient $\alpha' > \alpha > 0$, $\beta' > \beta > 0$ et $0 < a < b < 1$, on a

$$\frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{n!} \ll a^n \ll b^n \ll \frac{1}{n^{\beta'}} \ll \frac{1}{n^\beta} \ll \frac{1}{(\ln n)^{\alpha'}} \ll \frac{1}{(\ln n)^\alpha}.$$

IV. DL À CONNAITRE

Remarque : connaître ne veut pas dire qu'on sait vaguement que ça existe et que le coefficient est à peu près de cette forme... il faut être capable de les donner sans réfléchir!

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \operatorname{sh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ \operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\ \arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \\ \tan x &= x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6) \end{aligned}$$

V. EXERCICES

Dans tous les exercices, lorsqu'on parle de comparer des fonctions, c'est une comparaison pour les relations o , O ou $\equiv$ (et pas pour $\leq$).

EXERCICES À FAIRE

Exercice 1

Comparer en $+\infty$ les fonctions $f : x \mapsto \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x^\gamma}$ (les paramètres sont des réels).

**Exercice 2**

Déterminer les limites suivantes (en essayant de faire le moins de calculs possibles) :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \arcsin x}{x \tan^2 x}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{1/x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^x - 1}{x^x - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$

Exercice 3

Soient a et b deux réels, donner un équivalent simple en 0 de $\frac{a}{\sin(x)} - \frac{b}{\ln(1-x)}$.

Exercice 4

Calculer les développements limités (ou asymptotiques) suivants

1. $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ en 0 à l'ordre 4.

2. $\ln(1 + \cos x)$ en 0 à l'ordre 5.

3. $(1+x)^{1/x}$ en 0 à l'ordre 2.

4. $(\cos x)^{\sin x}$ en 0 à l'ordre 3.

5. $\frac{x}{e^x - 1}$ en 0 à l'ordre 2.

6. $x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$ en $+\infty$ à l'ordre 2.

Exercice 5

Donner un équivalent sous la forme la plus simple possible aux suites suivantes (puis donner leur limite éventuelle) :

a) $u_n = \frac{n^2 + \ln n}{2n + 3n(n+1)}$

d) $u_n = \frac{\ln(n^2 + 1)}{n+2}$

g) $u_n = \ln(\sin(\frac{1}{n}))$

j) $u_n = \frac{a^n + n^a}{n^{2a} + a^{2n}}$ (où $a > 0$).

b) $u_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$

e) $u_n = \frac{n! + 2^n}{3^n + n^4}$

h) $u_n = n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}}$

c) $u_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{n + \ln n}$

f) $u_n = \sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)}$

i) $u_n = \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1})$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $I =]-\pi, +\pi[$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ sinon. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES**Exercice 7**

Justifier $\arccos(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$.

Exercice 8

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

Exercice 9

Montrer que la fonction $f : x \mapsto x + \ln(1+x)$ admet au voisinage de 0, une fonction réciproque et déterminer le développement limité à l'ordre 3 de f^{-1} en 0.

Exercice 10

Montrer que l'équation $x \tan x = 1$ admet une unique solution sur $I_n = \left] n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2} \right[$. On l'appelle x_n . Donner un équivalent de x_n puis un développement asymptotique à 3 termes.

**Exercice 11**

Soit $f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}$ où $t \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Montrer que f_t admet en 0 un développement limité à tout ordre n . Montrer que ce développement est de la forme

$$f_t(x) = \sum_{k=0}^n P_k(t)x^k + o(x^n)$$

où P_k est un polynôme.

3. Montrer la relation $(k+1)P_{k+1}(t) = (2k+1)tP_k(t) - kP_{k-1}(t)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

5

ALGÈBRE LINÉAIRE

I. ESPACES VECTORIELS

SOUS-ESPACES VECTORIELS, CONSTRUCTION

L'ESSENTIEL - OPÉRATIONS

- **espace produit** : si $E_1, \dots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$ sous-espaces vectoriels alors on munit l'ensemble produit $E = E_1 \times \dots \times E_n$ d'une structure d'espace vectoriel avec les opérations
1. $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$
 2. $\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots, \lambda \cdot x_n)$
- où x_i et y_i sont dans E_i et λ dans $\mathbb{K}$.
- Soit $\mathcal{F}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E , l'intersection $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ est un sous-espace vectoriel de E .
- Soit A une partie (quelconque) de E , alors
- $F_1 = \bigcap_{\substack{A \subset G \\ G \text{ sev de } E}} G$, c'est-à-dire le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A
 - $F_2 = \left\{ x \in E, \exists n \in \mathbb{N}^*, a_1, \dots, a_n \in A, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \right\} = \{\text{combinaisons linéaires d'éléments de } A\}$
- existent et désignent le même sous-espace vectoriel de E : on l'appelle sous-espace engendré par A et on le note $\text{Vect}(A)$ (avec la convention $F_2 = \{0\}$ si A est vide).

EXEMPLE

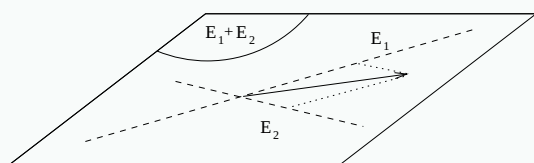
L'ensemble $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$. En effet $\mathcal{S}$ est l'ensemble des matrices sous la forme $aI_3 + bJ_3$ où $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par conséquent $\mathcal{S} = \text{Vect}(I_3, J_3)$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

SOMMES, SOMMES DIRECTES

L'ESSENTIEL - SOMMES

- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On appelle somme de F et G le sous-espace vectoriel engendré par $F \cup G$. On le note $F + G$. On a $x \in F + G$ si et seulement si il existe $f \in F, g \in G, x = f + g$.
- Soient $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E . On appelle somme de ces sous-espaces vectoriels, le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_{1 \leq i \leq n} F_i$. On le note $\sum_{i=1}^n F_i$. On a $x \in \sum_{i=1}^n F_i$ si et seulement si il existe $x_1 \in F_1, \dots, x_n \in F_n$ tels que $x = x_1 + \dots + x_n$.

EXEMPLE - SOMME



Sur cet exemple, on distingue deux droites E_1 et E_2 . Leur union n'est pas un espace vectoriel. On retrouve bien sur ce dessin la définition de la somme ainsi que le fait que $E_1 + E_2$ correspond au plus petit sous-espace vectoriel qui contient E_1 et E_2 (le plan défini par ces deux droites).

Exercice 1

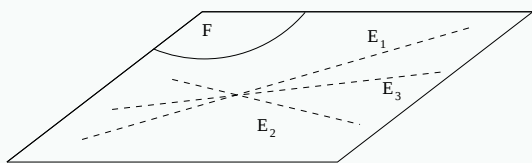
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un K -espace vectoriel E . Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.



L'ESSENTIEL - SOMMES DIRECTES

- les espaces F et G sont en somme directe lorsque $F \cap G = \{0\}$. On note cette somme $F \oplus G$. On a équivalence entre
- la somme $F + G$ est directe ($F \cap G = \{0\}$),
 - tout vecteur de $F + G$ s'écrit de façon unique $x = f + g$ avec $f \in F, g \in G$,
 - si $0_E = f + g$ avec $f \in F, g \in G$ alors $f = g = 0_E$.
- les espaces $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe *si et seulement si* (les propriétés sont équivalentes)
- tout $v \in \sum_{i=1}^n F_i$ s'écrit de façon unique sous la forme $v = f_1 + \dots + f_n$ avec $f_i \in F_i$.
 - le vecteur 0_E s'écrit de façon unique : la seule décomposition du vecteur nul $0_E = f_1 + \dots + f_n$ avec $f_i \in F_i$ est la décomposition où tous les vecteurs f_i sont nuls,
 - pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $F_i \cap \left(\sum_{j \neq i} F_j \right) = \{0\}$ (version symétrique),
 - pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $F_i \cap \left(\sum_{j < i} F_j \right) = \{0\}$ (ajout à la suite des précédents).

EXEMPLE - SOMMES DIRECTES ET NON DIRECTES



Sur cet exemple, on remarque 3 droites situées dans un même plan F . Les droites sont 2 à 2 en somme directe (les intersections 2 à 2 sont réduites à $\{0\}$) et $F = E_1 \oplus E_2 = E_2 \oplus E_3 = E_1 \oplus E_3$. En revanche on a simplement $F = E_1 + E_2 + E_3$ mais ces droites ne sont pas en somme directe.

⚠ Sommes directes - Erreur à ne pas faire!!!

Pour montrer qu'une somme de plusieurs sous-espaces vectoriels est directe, il n'est surtout pas suffisant de montrer que les intersections deux à deux sont réduites à $\{0\}$.

EXEMPLE

Sommes directes usuelles

- $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$,
- $\mathbb{K}[X] = P \cdot \mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X]$ si P est un polynôme de degré n (c'est simplement la division euclidienne par P),
- $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p = \ker p \oplus \ker(p - \operatorname{Id})$ si p est un projecteur

Exercice 2



Soient $E = \sum_{i=1}^n E_i = \bigoplus_{i=1}^n F_i$ deux décompositions de E . On suppose que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $E_i \subset F_i$.

- Montrer que la somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est directe.
- Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $E_i = F_i$.

Exercice 3

Soit F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E . On suppose que

$$F \cap G \subset F \cap H, \quad F + G \subset F + H, \quad H \subset G.$$

Montrer que $H = G$.

Exercice 4 (Supplémentaires et intersection)

Soit A et B deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E . Soit C un supplémentaire de $A \cap B$ dans B . Montrer que A et C sont supplémentaires dans $A + B$.

Exercice 5

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On note $F = \{P \in E, P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E, P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$ et $H = \{P \in E, P(X) = P(-X)\}$.

- Montrer que $F \oplus G = \{P \in E, P(1) = P(2) = 0\}$.
- Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.



II. FAMILLES DE VECTEURS

L'ESSENTIEL - FAMILLES LIBRES ET GÉNÉRATRICES

- $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs est génératrice de F lorsque tout vecteur de F s'écrit comme combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de $\mathcal{F}$ - cela revient à $\text{Vect}(\mathcal{F}) = F$,
- une famille génératrice reste génératrice lorsqu'on lui ajoute des vecteurs,
- Soit $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_n\}$ une famille de vecteurs de E . On dit que la famille $\mathcal{F}$ est libre (ou que les vecteurs sont linéairement indépendants) lorsque

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Cela revient à dire que la seule relation linéaire nulle entre les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ est la relation triviale (c'est-à-dire avec des coefficients tous nuls).

- Une famille $\mathcal{F}$ quelconque de vecteurs est libre lorsque toutes ses sous-familles finies sont libres.
- Une famille de vecteurs est liée lorsqu'elle n'est pas libre. Cela signifie qu'il existe des vecteurs $v_1, \dots, v_n$ de $\mathcal{F}$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ ou encore que l'un des vecteurs de $\mathcal{F}$ est une combinaison linéaire d'autres vecteurs de $\mathcal{F}$.



vecteur dans une famille liée

Lorsqu'une famille est liée, l'un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres MAIS on ne sait pas lequel (on ne peut pas forcément prendre celui qui nous arrange sans justification). De même tout vecteur de la famille n'est pas forcément combinaison linéaire des autres.

Propriété 17 (Familles libres et liées)

- Si $\mathcal{F}$ est une famille libre de vecteurs, alors toute famille extraite de $\mathcal{F}$ est encore une famille libre.
- La famille $\{x\}$ est liée si et seulement si x est le vecteur nul.
- La famille (x, y) est liée si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$ ou $x = \lambda y$ (les vecteurs sont proportionnels).
- Si on ajoute des vecteurs à une famille liée, alors elle reste liée.
- On famille qui contient le vecteur nul ou deux fois le même vecteur est liée.
- si la somme $\sum_{i=1}^n F_i$ est directe alors pour tout $x_1 \in F_1, \dots, x_n \in F_n$ **non nuls**, la famille $\{x_1, \dots, x_n\}$ est libre.
- dans un sous-espace vectoriel F engendré par une famille $(v_1, \dots, v_n)$, toute famille comprenant au moins $n + 1$ vecteurs est liée.



MÉTHODE - TECHNIQUES POUR MONTRER L'INDÉPENDANCE LINÉAIRE

On suppose que l'on dispose d'une famille de vecteurs $v_1, \dots, v_n$ (qui est éventuellement une sous-famille d'une famille infinie) et on cherche à montrer que ces vecteurs sont linéairement indépendants.

- On part d'une relation

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \quad (*)$$

et on cherche à montrer que tous les λ_i sont nuls.

- On peut essayer de montrer qu'ils sont nuls en conservant toujours la relation totale ou alors on peut essayer de montrer que l'un est nul et repartir de la nouvelle relation obtenue (à comprendre sur des exemples).
- Parfois on peut être amené à faire une récurrence sur le nombre d'éléments de la famille



MÉTHODE - FAMILLES DE $\mathbb{K}^n$

- Lorsque les vecteurs sont échelonnés, la famille est libre.
- La méthode la plus immédiate si on a les coordonnées des vecteurs est d'écrire la relation (*) sous forme d'un système d'équations linéaires et de résoudre.
- On peut trigonaliser le système pour arriver au but (le rendre triangulaire supérieur ou inférieur) - sauf si c'est déjà fait, dans ce cas c'est encore plus simple...
- On peut étudier l'application linéaire associée à ces vecteurs ou la matrice associée et prouver que son rang est le nombre de vecteurs. Dans le cas où la matrice est carrée, on peut calculer son déterminant.



MÉTHODE - FAMILLES DE POLYNÔMES

- Si la famille est échelonnée en degré, alors elle est libre.
- Si la famille est échelonnée en valuation (indice du premier coefficient non nul), alors elle est libre.
- On peut chercher une valeur qui annule tous les polynômes sauf un (raisonnement par orthogonalité).



MÉTHODE - FAMILLES DE FONCTIONS

- Étude locale : on regarde les singularités en un point (l'une n'est pas dérivable), les développements limités, des valeurs.
- Étude à l'infini : on regarde si la croissance de l'une des fonctions n'est pas supérieure à toutes les autres (relations de comparaisons).
- Raisonnement par orthogonalité : on cherche des valeurs qui annulent toutes les fonctions sauf une.
- Dérivation : si les fonctions sont suffisamment régulières, on peut dériver la relation (*) pour obtenir de nouvelles relations.

Exercice 6

Prouver l'indépendance des familles suivantes :

- $f_{\alpha_i} : x \mapsto e^{\alpha_i x}$ où $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- $f_{\alpha_i} : x \mapsto \sin(\alpha_i x)$ où $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- $f_{a_i} : x \mapsto |x - a_i|$ où $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- $P_k = (X - a)^k (X - b)^{n-k}$ pour k allant de 0 à n dans $\mathbb{R}[X]$.

III. DIMENSION FINIE

L'ESSENTIEL - DIMENSION FINIE

- l'espace E est dit de dimension finie lorsqu'il possède une partie génératrice finie.
- si E est un espace vectoriel admettant une partie génératrice $\mathcal{G}$ finie, alors E admet une base finie. On montre alors que toutes les bases de E possèdent le même nombre de vecteurs. Ce nombre commun est appelé dimension de E .
- si E est un espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E , alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$. De plus $E = F$ si et seulement si le sous-espace F est de même dimension que E .
- $\dim(F \times G) = \dim F + \dim G$ (se généralise à un produit de n).

L'ESSENTIEL - BASES EN DIMENSION FINIE

- Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs alors, on a l'équivalence entre les propriétés
 - $\mathcal{F}$ est une famille libre,
 - $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E ,
 - $\mathcal{F}$ est une base de E .
- **théorème de la base incomplète** : soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F} = \{e_1, \dots, e_p\}$ une famille libre de vecteurs de E .
 - il existe des vecteurs $e_{p+1}, \dots, e_n$ qui complète $\mathcal{F}$ en une base de E .
 - si $\mathcal{B} = \{f_1, \dots, f_n\}$ est une base de E , alors on peut compléter $\mathcal{F}$ en une base de E en choisissant les vecteurs dans $\mathcal{B}$.
- si F est un sous-espace vectoriel d'un espace E de dimension finie alors il admet au moins un supplémentaire dans E : il existe G tel que $F \oplus G = E$.

L'ESSENTIEL - DIMENSION ET SOMMES

Soient $F, G, F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie :

- $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim G$ et $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^n F_i\right) = \sum_{i=1}^n \dim F_i$.
- $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim G - \dim(F \cap G)$.
- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. Les sous-espaces F et G sont supplémentaires si et seulement si $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.
- si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E , alors $\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim F_i$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.



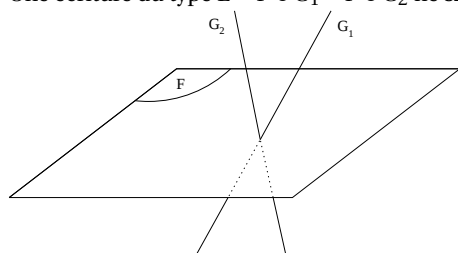
MÉTHODE - PROUVER L'ÉGALITÉ DE DEUX SOUS-ESPACES VECTORIELS

Comment prouver que 2 (sous-)espaces vectoriels F et G sont égaux? Les deux possibilités sont :

1. soit de montrer une double inclusion (très rarement une égalité directe), $F \subset G$ puis $G \subset F$.
2. soit de prouver l'une des inclusions, puis de montrer que les deux espaces sont de même dimension (par le théorème du rang, la dimension d'une somme, ou tout autre résultat provenant de l'énoncé).

**Erreurs interdites**

- Pour montrer que deux espaces sont égaux, il ne suffira **jamais** de montrer qu'ils sont de même dimension.
- Une écriture du type $E = F \oplus G_1 = F \oplus G_2$ ne **signifie pas** que $G_1 = G_2$:



L'espace se décompose bien comme somme directe de $F \oplus G_1$ ou de $F \oplus G_2$ mais il est clair que G_1 et G_2 sont différents.

Définition 3 (base adaptée à une décomposition)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $F_1, \dots, F_n$ des espaces supplémentaires (avec $F_i \neq \{0\}$ pour tout i). Si

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_{p_1}\} & \text{est une base de } F_1 \\ \mathcal{B}_2 = \{e_{p_1+1}, \dots, e_{p_2}\} & \text{est une base de } F_2 \\ \vdots & \vdots \\ \mathcal{B}_n = \{e_{p_{n-1}+1}, \dots, e_{p_n}\} & \text{est une base de } F_n \end{array} \right.$$

Alors $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1, \dots, N}$ avec $N = p_n$ est une base de E appelée *base adaptée à la décomposition* $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$.

Exercice 7

Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $F = \{(x, y, z, t) / x + y + z + t = 0\}$ et $G = \text{Vect}\{(1, -1, 1, 1), (0, 1, 2, 3)\}$. Déterminer $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 8

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = P'(1) = 0$.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E .
2. Donner une base de H et déterminer sa dimension.

IV. APPLICATIONS LINÉAIRES**L'ESSENTIEL - NOTATIONS, PROPRIÉTÉS**

On note

- $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E vers F , $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ l'algèbre des endomorphismes de E , $(GL(E), \circ)$ le groupe des automorphismes de E , $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur E (appelé espace dual de E).
- $\ker f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E, f(x) = 0\}$ le noyau de f ,
- $\text{Im } f = f(E) = \{y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\}$
- si E et F sont de dimension finie, alors $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$. Notamment $\dim E^* = \dim E$.

Exercice 9

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre les deux espaces vectoriels E et F . Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de F .

1. Justifier que $f(E_1)$ (et $f(E_2)$) est un sous-espace vectoriel de F .
2. Justifier que $f^{-1}(F_1)$ (et $f^{-1}(F_2)$) est un sous-espace vectoriel de E .
3. Que peut-on dire de $f(E_1 + E_2)$, $f(E_1 \cap E_2)$ par rapport à $f(E_1)$ et $f(E_2)$?
4. Même question avec $f^{-1}(F_1 + F_2)$ et $f^{-1}(F_1 \cap F_2)$.



CONSTRUCTION D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

L'ESSENTIEL

- si $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ et, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $f_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $f|_{E_i} = f_i$,
- si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ des vecteurs de F , alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $f(e_i) = f_i$.



MÉTHODE - ÉGALITÉ DE DEUX APPLICATIONS LINÉAIRES

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour montrer qu'elles sont égales :

- on montre que pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$ (elles coïncident partout)
- si $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$: pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ et pour tout $x \in E_i$, $f(x) = g(x)$ (elles coïncident sur des sev supplémentaires),
- si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E : pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $f(e_i) = g(e_i)$ (elles coïncident sur une base).

IMAGE DE FAMILLES

L'ESSENTIEL

- l'injectivité conserve l'indépendance linéaire : L'image d'une famille libre par une application injective reste libre
- la surjectivité conserve le caractère générateur : l'image d'une famille génératrice de F est une famille génératrice de $f(F)$
- si f est bijective de E sur F alors l'image de toute base de E par f est une base de F ,
- s'il existe une base de E dont l'image par f est une base de F alors f est bijective,
- deux espaces de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension

PROJECTEURS

L'ESSENTIEL - PROJECTEURS ET PROJECTIONS

- **projections** : si $E = F \oplus G$. L'application p qui à $x = f + g$ ($f \in F$ et $g \in G$) associe f est linéaire. C'est la projection sur F parallèlement à G . Elle vérifie $p \circ p = p$, $\text{Im } p = F$, $\text{ker } p = G$ et $x \in \text{Im } p$ si et seulement si $p(x) = x$ (ce qui revient à $\text{Im } p = \text{ker}(f - \text{Id})$)
- **projecteurs** : on appelle projecteur toute application $p \in \mathcal{L}(E)$ telle que $p \circ p = p$. On a alors $E = \text{Im } p \oplus \text{ker } p$ et p est la projection sur $F = \text{Im } p$ de direction $G = \text{ker } p$. Notamment $\text{Im } p = \text{ker}(p - \text{Id})$ c'est-à-dire que $x \in \text{Im } p$ si et seulement si $p(x) = x$
- **projecteurs associés** : si p est un projecteur (sur F parallèlement à G) alors $q = \text{Id} - p$ est le projecteur sur G parallèlement à F , appelé projecteur associé à p ,
- **projecteurs associés à une décomposition** : si $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$, la famille de projecteurs associée à cette décomposition est la famille de projecteurs $(p_1, \dots, p_n)$ telle que p_i est le projecteur sur E_i parallèlement à la somme $\bigoplus_{j \neq i} E_j$. Le projecteur p_i est l'application qui donne la composante d'un vecteur dans E_i lorsque ce vecteur est décomposé dans la somme $\bigoplus_{i=1}^n E_i$.

Remarque : La caractérisation de l'image en tant que $\text{ker}(p - \text{Id})$ est très intéressante : plutôt que de chercher un antécédent pour $y \in E$ afin de savoir qu'il est dans $\text{Im } p$, il suffit de calculer $p(y)$ et vérifier que $p(y) = y$.

Exercice 10

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E . Montrer l'équivalence

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ker } f = \text{ker } g \text{ et} \\ f \text{ et } g \text{ sont des projecteurs} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} f = f \circ g \\ g = g \circ f \end{array} \right.$$

**Exercice 11**

(diagonalisation cachée) Soit E un espace vectoriel, a et b deux éléments de $\mathbb{K}$ distincts et u un endomorphisme de E vérifiant

$$(u - a\text{Id}_E) \circ (u - b\text{Id}_E) = 0.$$

1. Montrer que $p = \frac{u - a\text{Id}_E}{b - a}$ et $q = \frac{u - b\text{Id}_E}{a - b}$ sont deux projecteurs associés de E .
2. Calculer u^n ($n \in \mathbb{N}$) à l'aide de p et q (on commencera par exprimer u en fonction de p et q).
3. On suppose que $a, b \neq 0$, en déduire u^n pour $n \in \mathbb{Z}$.
4. Montrer qu'on peut écrire $E = E_a \oplus E_b$ avec pour tout $x \in E_a$, $u(x) = ax$ et pour tout $x \in E_b$, $u(x) = bx$.

RANG**L'ESSENTIEL - RANG**

- le rang d'une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ est la dimension de $\text{Vect}(\mathcal{F})$ lorsqu'elle est finie,
- le rang d'une application linéaire est la dimension de son image lorsqu'elle est finie,
- si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie et $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors $\text{rg } f = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$
- on a $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg } f, \text{rg } g)$
- si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } f$ si $g \in \text{GL}(F)$ et $\text{rg}(f \circ h) = \text{rg } f$ si $h \in \text{GL}(E)$ (on ne change pas le rang en composant par un automorphisme).

Théorème 1 (Théorème du rang)

Soient E et F deux K -espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si H est un supplémentaire de $\ker f$ dans E alors l'application

$$\varphi : \begin{cases} H & \rightarrow \text{Im } f \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$$

est un isomorphisme. Dans le cas où E est de dimension finie, cela donne $\dim E = \dim \ker f + \text{rg } f$.

Exercice 12

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $\text{Im } f = G$ et $\ker f = F$.

Propriété 18

- Soit f une application entre deux espaces vectoriels de même dimension finie (par exemple u est un endomorphisme d'un espace de dimension finie). On a l'équivalence entre
 - f est bijective.
 - f est surjective.
 - f est injective.
- Soit f un endomorphisme de E de dimension finie alors on a l'équivalence
 - f est inversible (il existe g tel que $f \circ g = g \circ f = \text{id}$).
 - f est inversible à droite (il existe g tel que $f \circ g = \text{id}$).
 - f est inversible à gauche (il existe g tel que $g \circ f = \text{id}$).

**Erreurs sur cette équivalence**

- Ce corollaire est extrêmement pratique pour montrer facilement que certaines applications linéaires (en général ce sera des endomorphismes) sont bijectives : plutôt que de montrer les deux aspects (injectif et surjectif), un seul sera suffisant, ce qui en général réduit le travail de plus de la moitié (souvent l'un des aspects est très simple à montrer, l'autre plus compliqué).
- **NE JAMAIS** utiliser ce théorème si les espaces ne sont pas de même dimension, ou si les espaces sont de dimension infinie, c'est entièrement faux!!!

Exercice 13

Soient des entiers n et p tels que $0 < p \leq n$. Soit f dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et soit g dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ telles que $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{R}^p}$. Donner le rang et la nature de $g \circ f$.

**MÉTHODE - DÉTERMINER LA DIMENSION D'UN SOUS-ESPACE VECTORIEL**

Pour déterminer la dimension de F sev de E :

- on détermine une base et son cardinal,
- on utilise les formules de Grassman (dimension d'une somme)
- on utilise le théorème du rang si cet espace est une image ou un noyau
- on explicite un isomorphisme avec un espace vectoriel connu

EXEMPLE

Soit F l'ensemble des matrices de $M_{2n}(\mathbb{R})$ sous la forme $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où A et B sont deux matrices quelconques de $M_n(\mathbb{R})$: on considère l'application $\varphi : (A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2 \mapsto \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & B \end{pmatrix} \in F$. On montre que c'est un isomorphisme entre les deux espaces vectoriels. On en déduit que $\dim F = \dim(M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})) = \dim M_n(\mathbb{R}) + \dim M_n(\mathbb{R}) = 2n^2$.

Exercice 14

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, ainsi que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\dim \ker g \circ f \leq \dim \ker g + \dim \ker f$.

indication : on considérera la restriction de f à $\ker g \circ f$.

Exercice 15

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que si H est un sous-espace de E alors

$$\dim f(H) = \dim H - \dim(H \cap \ker f).$$

2. Montrer que si K est un sous-espace de F alors

$$\dim f^{-1}(K) = \dim(K \cap \operatorname{Im} f) + \dim(\ker f).$$

Indications : pour les deux questions, on cherchera à appliquer le théorème du rang à des applications linéaires bien choisies.

Exercice 16

On considère l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $E = \mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base de $\ker f$ puis de $\operatorname{Im} f$.
2. Déterminer une base de $\ker f^2$ puis de $\operatorname{Im} f^2$. Justifier $E = \operatorname{Im}(f^2) \oplus \ker(f^2)$.

V. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES**Exercice 17**

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur a tel que $(f(a), f^2(a), \dots, f^n(a))$ soit une base de E .

1. Montrer que f est bijective, puis que $(a, f(a), f^2(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E .
2. Montrer qu'il existe des constantes $a_0, \dots, a_{n-1}$ telles que

$$f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1f + a_0\operatorname{Id} = 0.$$

Indication : commencer par regarder $f^n(a)$.

3. Soit g un endomorphisme de E qui commute avec f . Montrer qu'on peut trouver des constantes $b_0, \dots, b_{n-1}$ telles que $g = b_{n-1}f^{n-1} + \dots + b_1f + a_0\operatorname{Id}$.

Indication : exprimer $g(a)$ dans la base $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$.

**Exercice 18 (Mines MP)**

Soit $n \geq 2$, $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n-1$. On note F le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ engendré par les polynômes $(P(X), P(X+1), \dots, P(X+n-1))$. On considère l'application Δ sur $\mathbb{R}[X]$ définie par $\Delta(Q) = Q(X+1) - Q(X)$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Delta^k P \in F$.
2. Montrer que la famille $(P(X), P(X+1), \dots, P(X+n-1))$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
3. Montrer qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$Q(X) = \sum_{k=1}^n \alpha_k Q(X+k)$$

Exercice 19 (Mines MP 2013)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, soit f_σ l'endomorphisme de E défini par $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ si $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

1. Nature géométrique de f_σ lorsque σ est une transposition?
2. On pose $p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_\sigma$. Déterminer la nature géométrique de p , son noyau et image.

Exercice 20

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ et un automorphisme $g \in GL(E)$ tels que $f = g \circ p$.
2. Montrer qu'il existe un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ et un automorphisme $g \in GL(E)$ tels que $f = p \circ g$.

Exercice 21 (Centrale MP 2010)

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\text{Im } f \subset \text{Im } g$ si, et seulement si, il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f = g \circ h$. Montrer qu'on peut choisir h tel que $\text{rg } h = \text{rg } f$.
2. Montrer que deux quelconques des propriétés suivantes entraînent la troisième :
 - (a) $f \circ g \circ f = f$,
 - (b) $g \circ f \circ g = g$,
 - (c) $\text{rg } f = \text{rg } g$.
3. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, l'ensemble des applications g vérifiant les propriétés précédentes n'est pas vide.

