CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE X 2006, MATH 1

Première partie

1. Si $\gamma = 1$ on a $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = \alpha$ ce qui est équivalent à $f(x) = \alpha e^x$.

2. Si $\gamma = -1$ alors $f'(x) = f(-x)$ d'où $f''(x) = -f'(-x) = -f(x)$ par conséquent f s'écrit sous la forme $f(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$.
$f(0) = \alpha$ donne $\lambda = \alpha$ puis $f'(0) = f(0) = \alpha$ fournit $\mu = \alpha$ donc, nécessairement, f s'écrit sous la forme $f(x) = \alpha(\cos x + \sin x)$.
Réciproque immédiate.

3. a) Soit $a_n = \dfrac{\gamma^{n(n-1)/2}}{n!}$ alors $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\gamma^n}{n+1} \to 0$ donc le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est infini par conséquent, $f_\gamma(x) = \alpha \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on peut dériver terme à terme.

$$\begin{aligned} f'_\gamma(x) &= \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma^{n(n-1)/2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma^{(n+1)n/2} \frac{x^n}{n!} \\ &= \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma^{n(n-1)/2} \frac{(\gamma x)^n}{n!} = f_\gamma(\gamma x). \end{aligned}$$

Vu que $f_\gamma(0) = \alpha$ alors la fonction f_γ est bien solution du système $(C_{\gamma,\alpha})$.

b) Si $|\gamma| > 1$ alors la série entière a un rayon de convergence nul.

4. a) On a $(T_A g)(x) - (T_A h)(x) = \displaystyle\int_0^x (g-h)(\gamma t)\,\mathrm{d}t$ donc, pour $x \in [-A, A]$, on obtient $|(T_A g)(x) - (T_A h)(x)| \leqslant |x|.\|g-h\| \leqslant A\|g-h\|$ d'où $\|T_A g - T_A h\| \leqslant A\|g-h\|$. T_A est lipschitzienne donc continue.

b) Par double implication.

- Si f dérivable est solution de $(C_{\gamma,\alpha})$ alors $f'(x) = f(\gamma x)$ est continue donc

$$f(x) - \underbrace{f(0)}_{=\alpha} = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(\gamma t)\,\mathrm{d}t$$

soit $f = T_A f$ et ceci pour tout $A > 0$.

- Si $f = T_A f$ pour tout $A > 0$ alors $f(x) = \alpha + \displaystyle\int_0^x f(\gamma t)\,\mathrm{d}t$ donc $f(0) = \alpha$ et, comme f est continue (dérivable), alors $f'(x) = f(\gamma x)$.

c) Au **a)** on a déjà majoré $|(T_A g)(x) - (T_A h)(x)|$ ce qui assure la propriété à l'ordre 1. On fait alors une récurrence sur n : si $|(T_A^n g)(x) - (T_A^n h)(x)| \leqslant \gamma^{n(n-1)/2} \dfrac{|x|^n}{n!} \|g-h\|$ alors, en écrivant que $T_A^{n+1} = T_A(T_A^n)$, on arrive à

$$\begin{aligned} |(T_A^{n+1} g)(x) - (T_A^{n+1} h)(x)| &= \left| \int_0^x (T_A^n g)(\gamma t) - (T_A^n h)(\gamma t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \left| \int_0^x |(T_A^n g)(\gamma t) - (T_A^n h)(\gamma t)|\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \left| \int_0^x \gamma^{n(n-1)/2} \frac{|\gamma t|^n}{n!} \|g-h\|\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \gamma^{n(n+1)/2} \left| \int_0^x \frac{|t|^n}{n!}\,\mathrm{d}t \right| .\|g-h\| \end{aligned}$$

d'où le résultat en intégrant.

d) Pour $x \in [-A, A]$ on a donc $|(T_A^n g)(x) - (T_A^n h)(x)| \leqslant |\gamma|^{n(n-1)/2} \dfrac{A^n}{n!} \|g - h\|$ soit, en prenant la norme infinie sur $[-A, A]$,

$$\|T_A^n g - T_A^n h\| \leqslant |\gamma|^{n(n-1)/2} \frac{A^n}{n!} \|g - h\| \leqslant \frac{A^n}{n!} \|g - h\|.$$

Montrons que $n(A) = 3\lceil A \rceil$ convient :

- Soit $u_n = \ln n! - n \ln n + n$,

$$u_{n+1} - u_n = \ln(n+1) + 1 - (n+1)\ln(n+1) + n \ln n = 1 - n \ln(1 + 1/n) \geqslant 0$$

car $\ln(1 + 1/n) \leqslant \dfrac{1}{n}$ donc $u_n \geqslant u_1 = 1 > 0$.

- On a ainsi $n! \geqslant \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ or $\dfrac{n(A)}{e} = \dfrac{3}{e}\lceil A \rceil > A$ donc $n(A)! > A^{n(A)}$ et par conséquent, $\|T_A^{n(A)} g - T_A^{n(A)} h\| \leqslant k \|g - h\|$ avec $k = \dfrac{A^{n(A)}}{n(A)!} < 1$.

e) Soient g et h deux solutions de $(C_{\gamma,\alpha})$: on a $T_A g = g$ et $T_A h = h$ pour tout $A > 0$ donc $\|T_A^{n(A)} g - T_A^{n(A)} h\| = \|g - h\| \leqslant k \|g - h\|$ avec $k < 1$ donc $\|g - h\| = 0$ soit, pour tout $x \in [-A, A]$, $g(x) = h(x)$.
Comme ceci est vrai pour tout $A > 0$, on en déduit que $g = h$ sur $\mathbb{R}$.

5. a) $f_\gamma(x)$, pour x fixé, est une série entière de γ qui converge pour $|\gamma| \leqslant 1$ donc $\gamma \mapsto f_\gamma(x)$ est continue. En particulier $\lim\limits_{\gamma \to 0} f_\gamma(x) = 1 + x$.

b) Posons $a_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$ et $u_n(\gamma, x) = \gamma^{n(n-1)/2} \dfrac{x^n}{n!}$ alors

$$\frac{\partial^{p+q} u_n}{\partial \gamma^p \partial x^q}(\gamma, x) = \begin{cases} a_n(a_n - 1)(\ldots)(a_n - p + 1)\gamma^{a_n - p} \dfrac{x^{n-q}}{(n-q)!} & \text{si } n \geqslant q \\ 0 & \text{si } n < q. \end{cases}$$

Pour $(\gamma, x) \in [-1, 1] \times [-A, A]$ on a

$$\left| \frac{\partial^{p+q} u_n}{\partial \gamma^p \partial x^q}(\gamma, x) \right| \leqslant \underbrace{|a_n(a_n - 1)(\ldots)(a_n - p + 1)|}_{\sim \frac{n^{2p}}{2^p}} \frac{A^{n-q}}{(n-q)!} = v_n(p, q) \text{ (pour } n \geqslant q).$$

Or $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \sim \dfrac{(n+1)^{2p}}{2^p} \times \dfrac{2^p}{n^{2p}} \dfrac{A}{n+1-q} \to 0$ donc $\sum v_n(p, q)$ converge par conséquent $\sum \dfrac{\partial^{p+q}}{\partial \gamma^p \partial x^q} u_n(\gamma, x)$ converge normalement sur $[-1, 1] \times [-A, A]$.

On fait alors une récurrence sur $p+q$ pour montrer que $\dfrac{\partial^{p+q} F}{\partial \gamma^p \partial x^q}$ existe et est continue :

- $p + q = 1$ est une conséquence immédiate du théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions dont la série des dérivées converge normalement.
- On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Si $p + q = n + 1$ alors si $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$ $\dfrac{\partial}{\partial \gamma}\left(\dfrac{\partial^n F}{\partial \gamma^{p-1} \partial x^q}\right)$ existe et est continue, de même pour $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^n F}{\partial \gamma^p \partial x^{q-1}}\right)$ (toujours le théorème de dérivation).
Grâce au théorème de Schwarz, on en déduit que la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$ pour $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$.
Dans le cas où (par exemple $p = 0$) on utilise le théorème de dérivation par rapport à x à l'ordre $n + 1$.

Conclusion : on peut affirmer que, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $\dfrac{\partial^{p+q} F}{\partial \gamma^p \partial x^q}$ existe et est continue sur $[-1, 1] \times [-A, A]$ et ceci pour tout $A > 0$ donc $F \in \mathcal{C}^\infty([-1, 1] \times \mathbb{R})$.

c) On distingue deux cas :
- Si $x \geqslant 0$ alors $f(x) \geqslant 0$ et $f'(x) = f(\gamma x) \geqslant 0$ donc f est croissante.
- Si $x \in [-1, 0]$, on pose $x = -y$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \gamma^{n(n-1)/2} \dfrac{y^n}{n!}$ qui est la somme d'une série alternée ($u_n = \gamma^{n(n-1)/2} \dfrac{y^n}{n!}$ décroît vers 0) donc $f(x) \geqslant 1 - y \geqslant 0$ et $f'(x) = f(\gamma x) \geqslant 1 - \gamma y \geqslant 0$ donc, là aussi, f est croissante.
  En $+\infty$, $f(x) \geqslant 1 + x$ pour $x \geqslant 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Deuxième partie

6. Posons $c_n = \dfrac{c_0}{\gamma^{n(n+1)/2}}$ et $c_{-n} = \dfrac{c_0}{\gamma^{n(n-1)/2}}$ pour $n \geqslant 0$ (i.e. $c_n = \dfrac{c_0}{\gamma^{n(n+1)/2}}$).
- Vérifions (i) : si $n \geqslant 0$, $|c_n|\gamma^n = \dfrac{|c_0|}{\gamma^{n(n-1)/2}}$ donc $\dfrac{|c_{n+1}|\gamma^{n+1}}{|c_n|\gamma^n} = \dfrac{1}{\gamma^n} \to 0$, $\sum |c_n|\gamma^n$ converge.
  De même $|c_{-n}|\gamma^n = \dfrac{|c_0|}{\gamma^{n(n-3)/2}}$ et $\sum |c_{-n}|\gamma^n$ converge.
- Vérifions (ii) : $\sum |c_n|$ et $\sum |c_{-n}|$ convergent et comme $e^{\gamma^n x} \leqslant 1$ pour $x \in \mathbb{R}_-$, les séries $\sum c_n e^{\gamma^n x}$, $\sum c_{-n} e^{\gamma^n x}$ convergent et les séries des dérivées convergent normalement grâce à (i) donc φ est dérivable et

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{c_n \gamma^n}_{=c_{n-1}} e^{\gamma^n x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{c_{-n} \gamma^{-n}}_{=c_{-n-1}} e^{\gamma^n x} + \underbrace{c_0}_{=c_{-1}} e^x \\ &= \varphi(\gamma x).\end{aligned}$$

7. $\varphi(0) = c_0 \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{\gamma^{n(n+1)/2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\gamma^{n(n-1)/2}} \right] = 2c_0 \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{\gamma^{n(n+1)/2}}}_{=s_\gamma}$ avec $s_\gamma > 0$. Il suffit alors de prendre $c_0 = \dfrac{\alpha}{2s_\gamma}$.

8. On pose cette fois-ci $c_n = (-1)^n \dfrac{c_0}{\gamma^{n(n+1)/2}}$ et $c_{-n} = (-1)^n \dfrac{c_0}{\gamma^{n(n-1)/2}}$. La condition (i) est satisfaite, (ii) est remplacée par $\sum c_n e^{-\gamma^n x}$ est absolument convergente pour tout $x \in [0, +\infty[$ et, si $\psi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-\gamma^n x}$, alors ψ est dérivable et

$$\psi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{-c_n \gamma^n}_{=c_{n-1}} e^{-\gamma^n x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{-c_{-n} \gamma^{-n}}_{=c_{-n-1}} e^{-\gamma^n x} + \underbrace{-c_0}_{=c_{-1}} e^x = \psi(\gamma x).$$

Cependant $\psi(0) = c_0 \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\gamma^{n(n+1)/2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\gamma^{n(n-1)/2}} \right] = 0$.

Troisième partie

9. Par une récurrence immédiate, on a $f^{(n)}(x) = \gamma^{n(n-1)/2} f(\gamma^n x)$ et, en remplaçant n par $n - k$, on obtient $f^{(n-k)}(\gamma^k x) = \gamma^{(n-k)(n-k-1)/2} f(\gamma^n x)$. On en déduit alors que $f^{(n)}(x) = \gamma^{n(n-1)/2-(n-k)(n-k-1)/2} f^{(n-k)}(\gamma^k x)$ et la relation demandée est une conséquence de l'égalité $n(n-1) - (n-k)(n-k-1) = 2kn - k(k+1)$.

10. On remarque tout d'abord que $G_\gamma \subset \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[)$ donc Ψ est bien définie et c'est une application linéaire.
Supposons que $\Psi(f) = 0$ i.e. $f(x) = 0$ pour $x \in [1, \gamma]$.
- Par récurrence sur p, montrons que $f = 0$ sur $I_{(-p)}$:

– Si $p = 0$, c'est vrai par hypothèse.
– Supposons que $f = 0$ sur $I_{(-p)}$ alors $f'(x) = f(\gamma x)$ entraîne que $f'(x) = 0$ sur $I_{(-p-1)}$, et comme $f(\gamma^{-p}) = 0$ alors $f(x) = 0$ sur $I_{(-p-1)}$.

- Montrons que $f = 0$ sur I_p : soit $y \in I_{(p)}$, $y = \gamma^p x$ où $x \in I_{(0)}$ alors $f^{(p)}(x) = \gamma^{p(p-1)/2} f(\gamma^p x) = 0$ donc $f(y) = 0$.

  Conclusion : $f = 0$ sur $\displaystyle\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} I(p) =]0, +\infty[$ soit Ψ est injective.

11. $*$ Si $g = \Psi(f)$ alors $f^{(n)}(x) = \gamma^{n-1} f^{(n-1)}(x)$ et, en appliquant ceci à $x = 1$, on trouve

$$g^{(n)}(1) = \gamma^{n-1} g^{(n-1)}(\gamma) \tag{Γ}$$

$*$ Réciproquement : soit $g \in \mathcal{C}^\infty(I_{(0)})$ vérifiant les conditions (Γ).

- On pose $f(\gamma x) = g'(x)$ et $f(x) = g(x)$ pour $x \in I_{(0)} = [1, \gamma]$. Pour montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(I_{(0)} \cup I_{(1)})$, il suffit de prouver que le branchement en γ est $\mathcal{C}^\infty$ à l'aide du théorème du prolongement dérivable soit encore que $f^{(n)}(x)$ admet une limite quand $x \to \gamma$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  La limite à gauche en γ existe et vaut $g^{(n)}(\gamma)$, il suffit de prouver qu'il en est de même pour la limite à droite.

  Lorsque $x \to 1^+$, on a $\gamma^n f^{(n)}(\gamma x) = g^{(n+1)}(x) \to g^{(n+1)}(1) = \gamma^n g^{(n)}(\gamma)$.

  $f \in \mathcal{C}^\infty(I_{(0)} \cup I_{(1)})$ et par les mêmes arguments, on prolonge f à une fonction de $\mathcal{C}^\infty([1, +\infty[)$ qui vérifie $f'(x) = f(\gamma x)$.

- Pour $x \in I_{(-1)} = [1/\gamma, 1]$, on pose $f(x) = g(1) - \displaystyle\int_x^1 g(\gamma t)\,\mathrm{d}t$. $f'(x) = g(\gamma x) = f(\gamma x)$ et, comme ci-dessus, on montre que $f \in \mathcal{C}^\infty(I_{(0)} \cup I_{(-1)})$ puis que f se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \gamma[$.

Conclusion : on a construit une fonction $f \in G_\gamma$ telle que $\Psi(f) = g$.

12. a) D'une manière générale on a $f^{(p)}(x) = \gamma^{p(p-1)/2} f(\gamma^p x)$ d'où la relation demandée en l'appliquant à $x \in I_{(-p)}$.

Si $x = \gamma^{-p}$ alors $f^{(p)}(\gamma^{-p}) = \gamma^{p(p-1)/2} f(1) = 0$, de même, $f^{(k)}(x) = \gamma^{k(k-1)/2} f(\gamma^k x)$ et en l'appliquant à $x = \gamma^{-p}$ on obtient $f^{(k)}(\gamma^{-p}) = f^{(k)}_{(-p)}(\gamma^{-p}) = \gamma^{k(k-1)/2} f(\gamma^{k-p}) = 0$ car $k - p \leqslant 0$.

b) On écrit la formule de Taylor :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\gamma^{-p}) + \cdots + \frac{(x-\gamma^{-p})^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p-1)}(\gamma^{-p}) + \frac{1}{(p-1)!}\int_{\gamma^{-p}}^x (x-t)^{p-1} f^{(p)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= q_p \int_{\gamma^{-p}}^x (x-t)^{p-1} f(\gamma^p t)\,\mathrm{d}t \text{ avec } q_p = \frac{\gamma^{p(p-1)/2}}{(p-1)!} \end{aligned}$$

et on applique cette formule à $x \in I_{(-p)}$.

c) Si $x = \gamma^{-p+1}$ on a $f_{(-p)}(\gamma^{-p+1}) = 0 = q_p \displaystyle\int_{\gamma^{-p}}^{\gamma^{-p+1}} (\gamma^{-p+1} - t)^{p-1} f_{(0)}(\gamma^p t)\,\mathrm{d}t$. On pose $u = \gamma^p t$ d'où $0 = \gamma^{-p}\displaystyle\int_1^\gamma (\gamma - u)^{p-1} f_{(0)}(u)\gamma^{-p}\,\mathrm{d}u$ soit $\displaystyle\int_1^\gamma (\gamma - u)^{p-1} f_{(0)}(u)\,\mathrm{d}u = 0$.

d) On approche alors $f_{(0)}$ par une suite de polynômes sur $[1, \gamma]$. Comme $((\gamma - X)^{p-1})_{p\in\mathbb{N}^*}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ alors, par linéarité, $\displaystyle\int_1^\gamma P(t) f_{(0)}(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout polynôme.

Si $P_n \xrightarrow[I_{(0)}]{C.U.} f_{(0)}$ alors, comme f est bornée sur $[1, \gamma]$, $P_n f \xrightarrow[I_{(0)}]{C.U.} f^2_{(0)}$ donc

$$0 = \int_1^\gamma P_n(t) f_{(0)}(t)\,\mathrm{d}t \to \int_1^\gamma f^2_{(0)}(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Comme f est continue alors $f_{(0)} = 0$ et, par injectivité de Ψ, $f = 0$.